الرياضيات

الصف العاشر

دليل المعلم

أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المطورة

عزيزي المعلِّم، يســرُّنا في هذه المقدمة أنْ نُبيِّن لك الأســس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهــج الرياضيات المطورة بطريقة مبســطة، وذلك بعرض بعض العناصــر من كتاب الطالب، وكتــاب التمارين، ودليل المعلِّم، التــي تتجلّى فيها تلك الجوانب العلميــة والتربوية بوضوح. ونحــن إذ نعرض هذه المقدمة فإنّا نأمــل أنْ تكون مُعِينًا لك على فهم كيفية اســتعمال المناهج المطورة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل غرفة الصف، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المقدمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم، وأدواته.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. بعض استراتيجيات التعلُّم:
   - التعلُّم القائم على المشاريع.
   - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

ســنُقدِّم لك أيضًا -في نهاية هذه المقدمة- بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعِينًا لك عند التخطيط لتقديم دروسك.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم لك دليل المعلِّم خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعدك على تقديم الدرس بنجاح.

1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد مقترحات في دليل المعلِّم تُعينك على تقديم التهيئة بنجاح في فقرة (التهيئة). قد تحوي هذه الفقرة نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا قد يرصد المعلِّم في أثناء هذه المرحلة بعض الأخطاء المفاهيمية ويُصحِّحها قبل بدء الدرس.

2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك عزيزي المعلِّم في هذه المرحلة أداء دور المُيسِّر، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في فقرة (أستكشف) في كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم طرح الأسئلة المقترحة عليهم، التي ورد ذكرها في بند (الاستكشاف) من دليل المعلِّم. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة بصورة صحيحة؛ لذا اقبل إجاباتهم، ثم انظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، وتأكَّد أنَّهم سيجيبون إجابة صحيحة عنها. علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في فقرة (أستكشف)؛ لحلِّها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المتوقع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم، بحيث يتمكَّنون من تكوين خبرات مشتركة محددة تساعدهم على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا استعن بالإرشادات الواردة في فقرة (التدريس) في دليل المعلِّم، لتتمكَّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

4 التدريب

فـي هذه المرحلـة يتدرَّب الطلبـة على أنواع مختلفة من المسـائل المجـرَّدة والحياتية في فقرتي (أتدرب و أحل المسـائل) و(مهارات التفكيـر العليـا) داخل غرفـة الصف، وذلك لترسـيخ المفاهيم الجديدة، وزيـادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة فـي المنزل. وكذلـك التدريبات والمسـائل الواردة في الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.

5 الإثراء

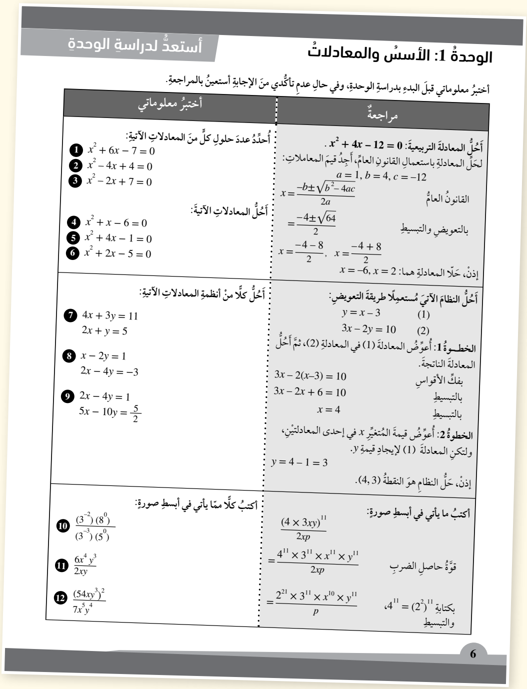
تُعَدُّ توسـعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأسـاس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشـراك الطلبـة في مهام تتضمَّـن مفاهيم وعمليات أوسـع وأكثر عمقا. تُوفِّر لك مناهج الرياضيـات المطـورة مصـادر عِـدَّة لإثراء الطلبة ذوي المسـتوى فوق المتوسـط، منها الفقـرة الخاصة بالإثراء أو التوسـعة في دليل المعلِّم التي تحوي مسـألةً، أو نشـاطًا صفيًّا، أو حاسـوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

6 الختام

هـي المرحلـة الأخيـرة مـن مراحـل تقديـم الـدرس، التـي تهـدف إلى تجميـع الأفـكار المختلفـة التـي تضمَّنهـا الـدرس، ثم عرضهـا بصورة مترابطـة، فضـلًا عـن اشـتمالها علـى مقترحـات تسـاعدك علـى تقديم هـذه الفقـرة بنجاح.

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن استمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المطورة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم التشخيصي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي**.

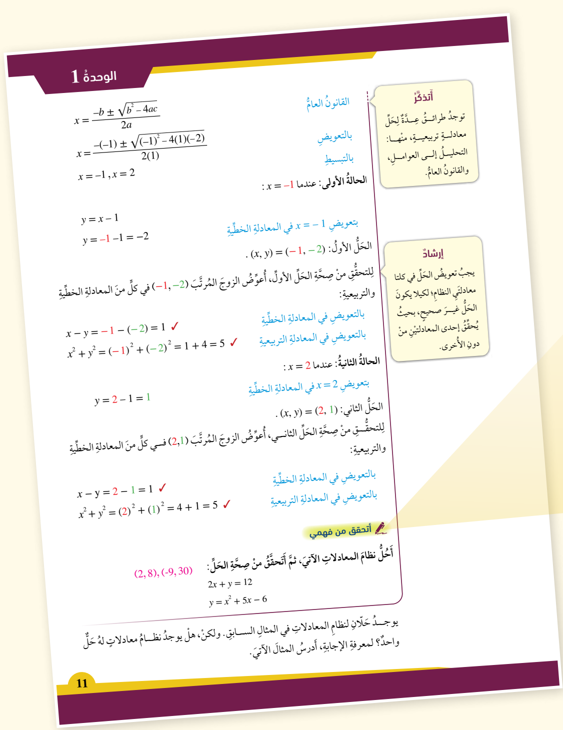

الوحدة 1: الأسس والمعادلات
أستعدُّ لدراسة الوحدة

أ التقويم التشخيصي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد المعلِّم على تحديد ما يلزمهم من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المطورة على أداة تقويم تشخيصي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحدث هذا النوع من التقويم في أثناء عملية التدريس، ويهدف إلى متابعة تعلُّم الطلبة أولًا بأول، والتأكُّد أنَّ العملية التعليمية التعلُّمية تسير في اتجاه تحقيق أهدافها المنشودة، وأنَّه لا يوجد انحراف عن مسارها؛ ما يساعد المعلِّم على اتخاذ القرارات الصحيحة، مثل: الاستمرار في عملية التدريس، أو التعديل عليها، أو النظر فيها من جديد. من أدوات التقويم التكويني: الأسئلة الشفوية، والملاحظات غير الرسمية، والاختبارات القصيرة.


الوحدة 1

تحتوي مناهج الرياضيات المطورة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل (أتحقَّق من فهمي) التي تلي كل مثال.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الحَلِّ: (2, 8), (-9, 30)

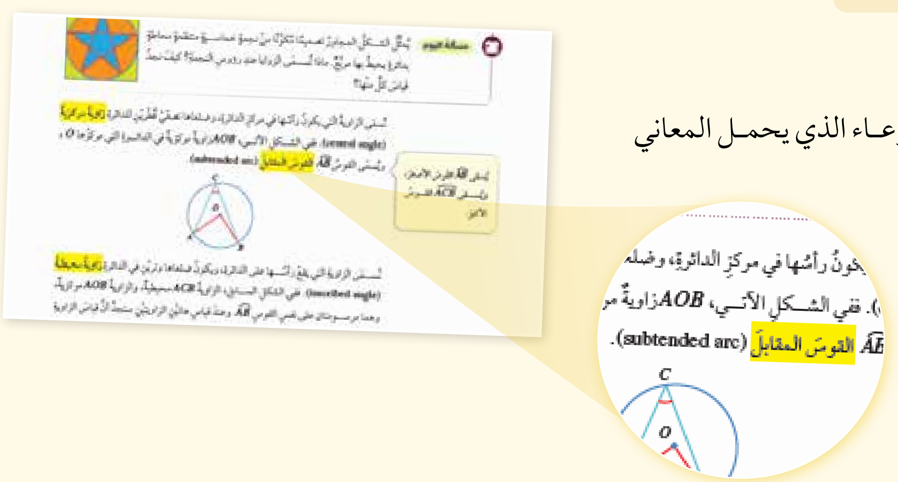
$$2x + y = 12$$

$$y = x^2 + 5x - 6$$

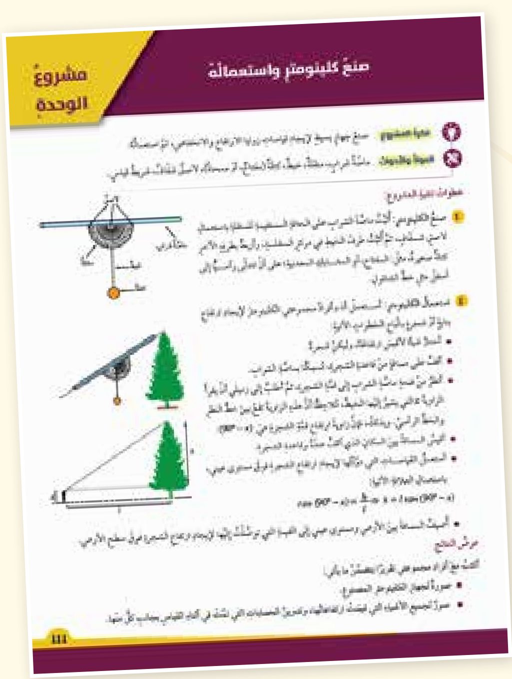
جـ التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. ويساعد المعلِّم على تحديد الطلبة الذين أتقنوا حدًّا مُعَيَّنًا من المهام المنوطة بهم في أثناء تدريس وحدة دراسية، أو فصل دراسي. تُوفِّر المناهج المطورة للمعلِّم أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في (اختبار الوحدة) الذي يحوي مسائل متنوعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.

3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:



تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المطورة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أول مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.

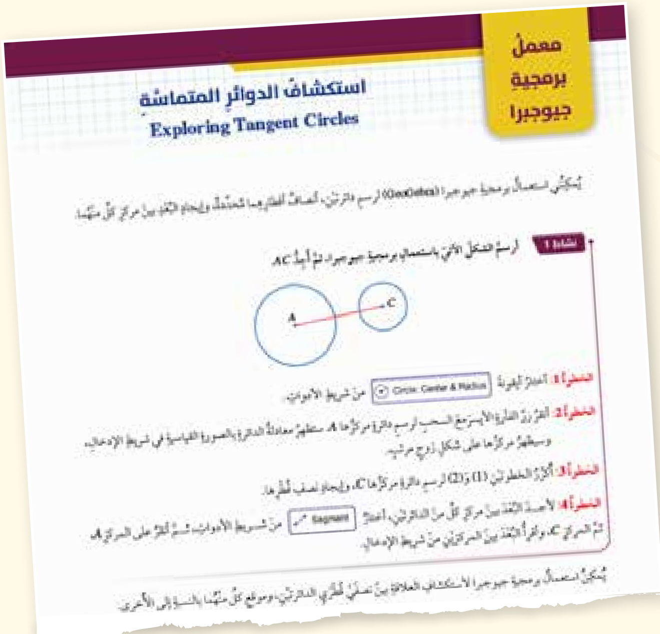


4 بعض استراتيجيات التعلُّم:

أ التعلُّم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلُّم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلُّم الحديثة التي تدمج بين المعرفة والفعل؛ إذ يدرس الطلبة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم يُطبِّقونها في حلِّ مشكلات حقيقية، وصولًا إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفس، وتُحفِّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحمُّل المسؤولية، وتُعِدُّهم للحياة، وتحثُّهم على العمل والإنتاج.

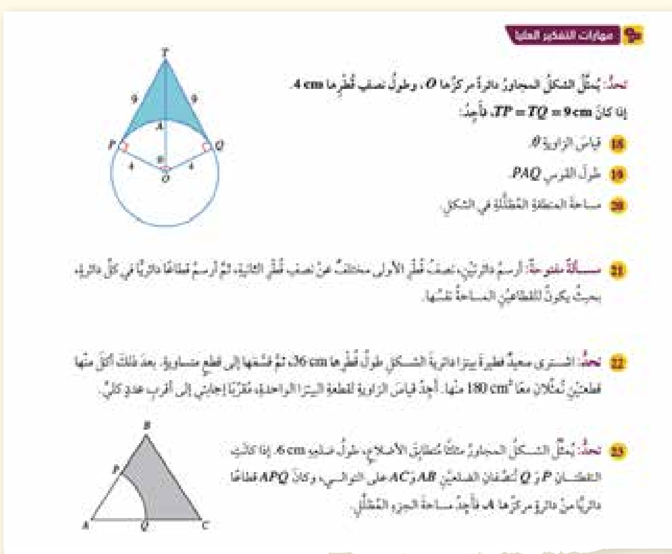
ب التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.



تُسهِم التكنولوجيا إسهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشـــاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمُّل والتحليل والتفكير بـــدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنــح أدلة المعلمين في مناهــج الرياضيات المطورة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ ســواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.

5 مهارات التفكير العليا:



تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنــح مناهــج الرياضيات المطـورة الطلبة فرصـة لتطوير مهـارات التفكير العليـا فـي كل درس، بطرحهـا مسـائل مرتبطـة بنتاجـات الـدرس؛ إذ تحـوي فقـرة (مهـارات التفكيـر العليا) عـددًا من المسـائل ضمـن العناويـن الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المطورة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل طالب (التمايز)، وتساعد كلًّا منهم على تجاوز عثراته، وتعزيز مناحي تفوُّقه. يُمكِن للمعلِّم تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

المحتوى: يُقصَد بذلك ما يحتاج الطالب إلى تعلُّمه، وكيفية حصوله على المعلومة، ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

الأنشطة: هي الأنشطة التي يشارك فيها الطالب؛ لكي يفهم المحتوى، أو يُتقِن المهارة. ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ولكنَّهم يتقدمون فيها إلى مستويات مختلفة، أو منح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

المنتَجات: المشاريع التي يتعيَّن على الطالب تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّمه في الوحدة، وتوظيفه في حياته، والتوسُّع فيه. ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في المنتجات السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار منتَجاتهم الخاصة بحسب ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. ومن الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف، يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط حل معادلة خطية فقط أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، في خطوة أولى، وتدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتى يتمكنوا من حل النظام المبين في النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وقراءته أمام الزملاء؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المعلِّم، تساعدك مناهج الرياضيات المطورة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر منظمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في دليل المعلِّم، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِنك اختيار طريقة التدريس التي تراها مناسبة داخل غرفة الصف؛ فأنتَ أكثر علمًا بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في مدرستك.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعدك على تقديم دروسك:

التعلُّم المقلوب:

نموذج تربوي يهدف إلى استعمال التقنيات الحديثة وشبكة الإنترنت على نحوٍ يسمح للمعلِّم بإعداد الدرس عن طريق مقاطع الفيديو، أو الملفات الصوتية، أو غير ذلك من الوسائط؛ ليطَّلِع عليها الطلبة في منازلهم (تظلُّ متاحة لهم على مدار الوقت)، باستعمال حواسيبهم، أو هواتفهم الذكية، أو أجهزتهم اللوحية قبل الحضور إلى غرفة الصف. في حين يُخصَّص وقت اللقاء الصفي في اليوم التالي لتطبيق المفاهيم والمحتوى العام الذي شاهدوه، وذلك في صورة سلسلة من أنشطة التعلُّم النشط، والأنشطة الاستقصائية، والتجريبية، وحلِّ المسائل الرياضية، والعمل بروح الفريق، وتقييم التقدُّم في سير العمل.

بطاقة الخروج:

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، ثم يجمع المعلِّم البطاقات ليقرأ الإجابات، ثم يُعلِّق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يستند إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه يرفع المعلِّم يده، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع المعلِّم يده يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة:

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل طالب في المجموعة رقم خاص، وعندما يسعى المعلِّم إلى الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، فإنَّه يختار رقمًا من دون أنْ يعرف صاحبه، فيجيب الطالب عن السؤال، وقد يساعده على الإجابة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر:

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأول: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يطرح المعلِّم سؤالًا يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأول، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة:

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يطرح المعلِّم سؤالًا يجيب عنه كل طالب بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ ليتمكَّن المعلِّم من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذا الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يُلاحِظ المعلِّم نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	خطوات تنفيذ مشروع الوحدة	عدد الحصص
تهيئة الوحدة		المعادلة التربيعية نظام معادلات الأسس	• ورقة المصادر 1 • ورقة المصادر 2	توزيع الطلبة إلى مجموعات صغيرة غير متجانسة.	1
معمل برمجية جيوجبرا: حل أنظمة المعادلات بيانيًّا.	• يستخدم برمجية جيوجبرا لحل نظام معادلات خطية وتربيعية بيانيًّا.		• برمجية جيوجبرا.	الخطوتان: الأولى، والثانية.	1
الدرس 1: حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.	• يحل نظامًا مكونًا من معادلة خطية وأخرى تربيعية. • يتعرف عدد الحلول الممكنة لحل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية. • ينمذج مسألة حياتية باستعمال نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ويحله.		• برمجية جيوجبرا، الآلة الحاسبة.	متابعة الخطوة الثانية.	3
الدرس 2: حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين.	• يحل نظامًا مكونًا من معادلتين تربيعيتين. • يتعرف عدد الحلول الممكنة لحل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين. • ينمذج مسألة حياتية باستعمال نظام مكون من معادلتين تربيعيتين، ويحله.		• برمجية جيوجبرا.	الخطوة الثالثة.	3
الدرس 3: تبسيط المقادير الأسية.	• يتعرف الأسس النسبية وخصائصها. • يكتب مقادير أسية في أبسط صورة.	الأس النسبي	• الآلة الحاسبة.	متابعة الخطوة الثالثة. وبدء الاستعداد لعرض النتائج.	3
الدرس 4: حل المعادلة الأسية.	• يحل معادلات أسية. • يحل أنظمة معادلات أسية.	المعادلة الأسية	• برمجية جيوجبرا.	استكمال التحضير لعرض النتائج.	3
عرض نتائج المشروع.				عرض النتائج.	1
اختبار الوحدة					2
مجموع الحصص					17

الوحدةُ 1

الأسسُ والمعادلاتُ

Exponents and Equations

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستخدَمُ أنظمةُ المعادلاتِ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ. فخبراءُ الأرصادِ الجويةِ -مثلًا- يُعبِّرونَ عنِ العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارةِ، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطلِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطيٍّ؛ ذلكَ أنَّ أيَّ تغيُّرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدّي إلى تغيُّرٍ في العواملِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِّ.
- ✓ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ تتضمَّنُ معادلتيْنِ خطِّيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.
- ✓ قواعدَ الأسسِ الصحيحةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◂ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ، وأُخرى تربيعيةٍ.
- ◂ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ.
- ◂ الأسسَ النسبيةَ، وخصائصَها.
- ◂ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

6

الوحدةُ 1

نظرة عامة على الوحدة:

تعلم الطلبة فيما سبق حل معادلات خطية وتربيعية، وحل أنظمة معادلات مكونة من معادلتين خطيتين، وسيتعلمون في هذه الوحدة حل معادلات غير خطية، مثل: المعادلة الأسية، وعدة أنواع من أنظمة المعادلات، مثل: حل نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية، أو معادلتين تربيعيتين ومعادلتين أسيتين، وتبسيط مقادير جبرية. وقد تعلم الطلبة سابقًا الربط بين الأسس والجذور، وتبسيط المقادير العددية والجبرية باستعمال الأسس النسبية، وتقدير قيم الجذور التربيعية، وسوف يبنون على ذلك في هذه الوحدة لتعلم الاقتران الأسي، واستعماله لنمذجة مسائل حياتية عن النمو والاضمحلال الأسي.

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- التحليل إلى العوامل.
- حل معادلة تربيعية بطرائق مختلفة (التحليل، إكمال المربع، القانون العام).
- استعمال مميز المعادلة التربيعية في تحديد عدد حلولها.

الصف الثامن

- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين جبريًا وبيانيًا.
- الأسس وقوانينها.

الصف العاشر

- حل أنظمة المعادلات: معادلة خطية وأخرى تربيعية، معادلتان تربيعيتان، معادلتان أسيتان.
- تعرف عدد الحلول الممكنة لنظام من المعادلات.
- حل مسائل رياضية وحياتية عن أنظمة المعادلات.
- تعرف الأسس النسبية وخصائصها.
- تبسيط مقادير أسية.
- حل معادلات أسية.
- التحقُّق من صحة الحل باستعمال البرمجيات.

لاحقًا

الصف الحادي عشر (العلمي)

- حل أنظمة المتباينات.
- تعرف الاقترانات الأسية واللوغاريتمية وخصائصها.
- حل معادلات أسية.
- حل مسائل تتضمن تطبيقات اقتصادية على الاقترانات الأسية واللوغاريتمية.

مشروعُ الوحدةِ

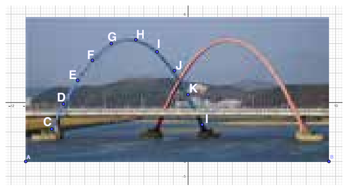
أنظمةُ المعادلاتِ في حياتِنا

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنْ أنظمةِ معادلاتٍ في نماذجَ حياتيةٍ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورٍ لنماذجَ حياتيةٍ تظهرُ فيها منحنياتٌ ومستقيماتٌ متقاطعةٌ (مثلُ: الجسورِ، ونوافيرِ المياهِ، وخرائطِ الطرقِ)، أوْ ألتقطُ صورًا لذلكَ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ على جهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ كلٍّ منَ المنحنياتِ المتقاطعةِ التي تظهرُ في الصورِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ على أيقونةِ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.
   - أُعدِّلُ موقعَ الصورةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بتحريكِ النقطتيْنِ A وَ B اللتيْنِ تظهرانِ عليْها.
   - أَجِدُ معادلةَ أحدِ المنحنياتِ التي تظهرُ في الصورةِ، وذلكَ بتحديدِ بعضِ النقاطِ عليْهِ باستعمالِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ.



   - أكتبُ الصيغةَ FitPoly ({C, D, E, F, G, H, I, J, K, L},n) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ ↵ ليظهرَ منحنًى فوقَ الصورةِ، ومعادلةٌ في شريطِ الإدخالِ.
   - أستعملُ المُؤشِّرَ فوقَ المعادلةِ لضبطِ المنحنى الظاهرِ، بحيثُ ينطبقُ تمامًا على المنحنى الذي في الصورةِ.

   - أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ لتحديدِ معادلاتِ المنحنياتِ الأُخرى التي تظهرُ في الصورةِ.
3. أكتبُ مع أفرادِ مجموعتي نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ منحنييْنِ متقاطعيْنِ في كلِّ صورةٍ، ثمَّ نختارُ إحدى هذهِ الأنظمةِ لنحُلَّها جبريًّا، ثمَّ نتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ بإظهارِ نقاطِ تقاطعِ المنحنييْنِ في برمجيةِ جيوجبرا.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ (نستعملُ خاصيةَ طباعةِ الشاشةِ).
- بعضُ الصعوباتِ التي واجهْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومعلومةٌ جديدةٌ تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ.

أداة تقييم المشروع

الرقم	مؤشر الأداء	1	2	3
1	نفَّذ أفراد المجموعة خطوات المشروع على النحو المطلوب.			
2	عرض أفراد المجموعة المشروع بطريقة واضحة.			
3	وثَّق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
4	عمل أفراد المجموعة بروح الفريق.			
5	استطاع أفراد المجموعة التعبير عن الصور بمعادلات جبرية.			
6	حل أفراد المجموعة النظام جبريًّا، وتحققوا من صحة الحل.			
7	حل أفراد المجموعة نظام المعادلات حلًّا صحيحًا.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: أنظمة المعادلات في حياتنا.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات البحث والتمثيل والتفسير والنمذجة، بالبحث عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات ومستقيمات متقاطعة، مثل: الشوارع، والجسور، والطرق المتقاطعة، والمنشآت المعمارية.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، يتكون كل منها من (5–7) طلبة، ثم اطلب إليهم أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولًا بأول، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب لتوثيق خطوات التنفيذ المتعلقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- وضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسلم التقدير.
- بيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوة الثانية بعد الانتهاء من معمل برمجية جيوجبرا (حل أنظمة المعادلات بيانيًّا)، ويمكن البدء بتنفيذ الخطوة الثالثة بعد الانتهاء من الدرس الأول (حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية)، أو بعد الانتهاء من الدرس الثاني، بحسب النظام الذي يختارون حله.
- عند انتهاء الوحدة، حدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وناقِشهم فيها.
- اطلب إليهم تسجيل تقييمهم الذاتي لمشروعهم.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

عرض النتائج

- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين لتساعد طلبتك على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: حل المعادلات الخطية، وحل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًّا وجبريًّا (بالحذف، والتعويض)، وحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام والتحليل، إضافةً إلى الأسس الصحيحة والعمليات عليها.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة في عمود (أختبر معلوماتي)، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال إلى قراءة المثال المقابل له في عمود (مراجعة).
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح أحد حلول الطلبة غير الصحيحة –من دون ذكر اسم الطالب–، وأدر نقاشًا عنه.
- ذكِّر الطلبة بتحليل المعادلات التربيعية باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل، مُناقِشًا إياهم في السؤال الآتي:

أحل المعادلات الآتية:

1. $x^2 + 5x = -4$
2. $x^2 + 2x - 15 = 0$
3. $6x^2 - 5x + 1 = 0$

- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم حل السؤال باستعمال القانون العام.

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

مراجعةٌ	أختبرُ معلوماتي
أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + 4x - 12 = 0$. لحَلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 4, c = -12$ القانونُ العامُّ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالتعويضِ والتبسيطِ $= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$ $x = \frac{-4-8}{2}, \quad x = \frac{-4+8}{2}$ إذنْ، حَلّا المعادلةِ هما: $x = -6, x = 2$	**أُحدِّدُ عددَ حلولِ كلٍّ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:** 1 $x^2 + 6x - 7 = 0$ يوجد حلان حقيقيان 2 $x^2 - 4x + 4 = 0$ يوجد حل حقيقي واحد 3 $x^2 - 2x + 7 = 0$ لا يوجد حلول حقيقية **أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:** 4 $x^2 + x - 6 = 0$ $x_1 = 2 , x_2 = -3$ 5 $x^2 + 4x - 1 = 0$ $x_1 = -2-\sqrt{5}, x_2 = -2+\sqrt{5}$ 6 $x^2 + 2x - 5 = 0$ $x_1 = -1-\sqrt{6}, x_2 = -1+\sqrt{6}$
أَحُلُّ النظامَ الآتيَ مُستعمِلًا طريقةَ التعويضِ: $y = x - 3$ (1) $3x - 2y = 10$ (2) **الخطــوةُ 1:** أُعوِّضُ المعادلةَ (1) في المعادلةِ (2)، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ الناتجةَ. بفكِّ الأقواسِ $3x - 2(x-3) = 10$ بالتبسيطِ $3x - 2x + 6 = 10$ بالتبسيطِ $x = 4$ **الخطوةُ 2:** أُعوِّضُ قيمةَ المُتغيِّرِ x في إحدى المعادلتيْنِ، ولتكنِ المعادلةَ (1) لإيجادِ قيمةِ y. $y = 4 - 1 = 3$ إذنْ، حَلُّ النظامِ هوَ النقطةُ $(4, 3)$.	**أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ:** 7 $4x + 3y = 11$ $x = 2$ $2x + y = 5$ $y = 1$ 8 $x - 2y = 1$ $2x - 4y = -3$ لا يوجد حل للنظام 9 $2x - 4y = 1$ $5x - 10y = \frac{5}{2}$ عدد لا نهائي من الحلول
أكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ: $\frac{(4 \times 3xy)^{11}}{2xp}$ قوَّةُ حاصلِ الضربِ $= \frac{4^{11} \times 3^{11} \times x^{11} \times y^{11}}{2xp}$ بكتابةِ $4^{11} = (2^2)^{11}$، والتبسيطِ $= \frac{2^{21} \times 3^{11} \times x^{10} \times y^{11}}{p}$	**أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:** 10 $\frac{(3^{-2})(8^0)}{(3^{-3})(5^0)}$ 3 11 $\frac{6x^4y^3}{2xy}$ $3x^3y^2$ 12 $\frac{(54xy^3)^2}{7x^5y^4}$ $\frac{2916y^2}{7x^3}$

إرشادات للمعلم

- لتحديد عدد حلول المعادلة، ذكِّر الطلبة بمميز المعادلة التربيعية وحالاته الثلاث:
  (المميز > 0: يوجد حلان حقيقيان، المميز $= 0$: يوجد حلان متماثلان (حل واحد حقيقي)، المميز < 0: لا توجد حلول حقيقية).
- لحل الأسئلة: 7، و8، و9، ذكِّر الطلبة بنظام المعادلات الخطية، وعدد حلول النظام. ذكِّرهم أيضًا بحل النظام باستعمال طريقة الحذف، وذلك بمناقشة السؤال الآتي:

1. $x + y = 5$
   $x = y + 1$
2. $2y = 4 - x$
   $5x + 10y = 20$

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

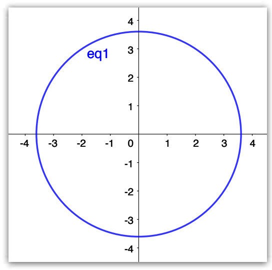
حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانيًّا
Solving Systems of Equations Graphically

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ، وحَلِّها بيانيًّا.

أستعملُ الرابطَ www.geogebra.org /download لتثبيتِ نسخةِ GeoGebra Classic 6 منْ هذهِ البرمجيةِ على جهازِ الحاسوبِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ النسخةِ المتوافرةِ في شبكةِ الإنترنتْ منْ دونِ حاجةٍ إلى تثبيتِها في جهازِ الحاسوبِ عنْ طريقِ الرابطِ الإلكترونيِّ: www.geogebra.org /classic

نشاطٌ **أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.**

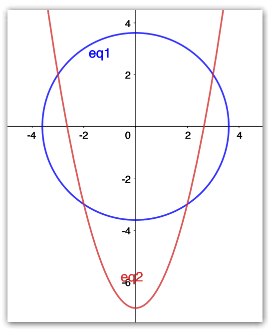
$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$



الخطوةُ 1: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x	□²	+	y	□²	=	1	3	↵



الخطوةُ 2: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 - y = 7$.

أُدخِلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالنقرِ على المفاتيحِ الآتيةِ:

x	□²	-	y	=	7	↵

أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في أربعِ نقاطٍ؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلاتِ.

8

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

التعلم القبلي:

- نظام المعادلات وحله.
- عدد حلول النظام.

إرشادات للمعلم

حمِّل نسخة من برمجية جيوجبرا في أجهزة الحاسوب بمختبر المدرسة، واعمل على تحديثها باستمرار، مُستعمِلًا الرابط: https://www.geogebra.org/download

1 التهيئة

- توَجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية غير متجانسة، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب، والآخر من ذوي المستوى فوق المتوسط – ما أمكن – لتحقيق التشاركية.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا (GeoGebra).
- عرِّف الطلبة بإمكانيات برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم المجسمات والأشكال ثنائية البُعد، وقياس الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

2 التدريس

- وضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفِّذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وتأكَّد أن كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- ناقِش الطلبة في عدد نقاط التقاطع التي تُمثِّل حلول النظام، وعلاقة عدد الحلول بعدد نقاط التقاطع، ثم اطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  - » هل تتوقع أن يكون عدد الحلول أربعة دائمًا؟
  - » هل يوجد نظام لـه ثلاثة حلول، أو حلان، أو حل واحد، أو ليس له حل؟
- اطلب إلى عدد من الطلبة رسم منحنيين يُمثِّلان كل حالة على اللوح، ثم اسأل الطلبة:
  - » أيكم يوافقهم الرأي؟
  - » مَنْ يعرض رسمًا آخرَ؟

إرشادات للمعلم

- إذا توافر جهاز عرض في المختبر، فاعرض خطوات النشاط أمام الطلبة، ثم اطلب إليهم بدء تنفيذ الخطوات نفسها في أسئلة بند (أتدرب).
- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط حل معادلة خطية فقط أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، في خطوة أولى، وتدرَّج معهم في خطوات التطبيق حتى يتمكنوا من حل النظام المبين في النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وقراءته أمام الزملاء؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

3 التدريب

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسـئلة (6–1) في بند (أتدرب)، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا.
- اختر بعض الأخطاء التـي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر اسماء الطلبة؛ تجنبًا لإحراجهم–، ثم ناقِش طلبة الصف فيها.

الواجب البيتي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسـئلة التي لم يتمكنوا من حلها في غرفة الصف.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

4 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا في تحديد عدد الحلول الممكنة لأنظمة معادلات مختلفة، مثل:
  - » نظام من معادلتين خطيتين.
  - » نظام من معادلة خطية وأخرى تربيعية.
  - » نظام من معادلتين تربيعيتين.
- أو أي أنظمــة أخرى، ثــم إعداد تقريــر بالنتائج التي توصَّل إليهــا كل منهم مُوثَّقة بالصور، أو باســتعمال خاصية طباعة الشاشة.

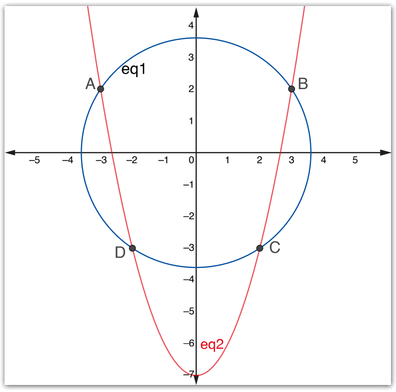
تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شــبكة الإنترنت عن صور لنمــاذج حياتية تظهر فيهــا منحنيات ومســتقيمات متقاطعة (مثل: الجســور، ونوافير الميــاه، وخرائط الطرق)، أو التقاط صــور لذلك، ثم حفظها في ملف بجهاز الحاسوب.
- اطلب إليهم استعمال برمجية جيوجيبرا لإيجاد معادلة كل من المنحنيات المتقاطعة التي تظهر في الصور المخزنة.
- ذكِّرهم بضرورة توثيق خطوات تنفيذ المشروع بالطرائق التي يرونها مناسبة، مثل خاصية طباعة الشاشة.

5 الختام

- وجِّــه كل طالب إلى كتابة نظام من معادلتين، ثم إمراره إلى زميله في المجموعة؛ لحله بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا.
- اطلب إلى كل طالب أن يتحقق من حل زميله.

الخطوةُ 3: أُحـــدِّدُ إحداثياتِ نقاطِ التقاطعِ بينَ منحنيَي المعادلتيْنِ. أختارُ Intersect منْ شـــريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على منحنيَي المعادلتيْنِ، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ.



إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ هيَ: (3- ,2-) ,(3- ,2) ,(2 ,3) ,(2 ,3-)؛ ما يعني أن حلولَ نظامَ المعادلاتِ هيَ:

الحَلُّ الأولُ: $x=-3, y=2$ **الحَلُّ الثاني:** $x=3, y=2$

الحَلُّ الثالثُ: $x=2, y=-3$ **الحَلُّ الرابعُ:** $x=-2, y=-3$

أتدرب

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:

1) $y=x-4$, $2x^2+3y^2=12$ لا يوجد حل.

2) $y=x^2$, $x^2+2y^2=34$ $(-1.97, 3.881)$, $(1.97, 3.881)$

3) $x+y=16$, $x^2-y^2=20$ $(8.625, 7.375)$

4) $3x+4y=1$, $y=x^2+5$ لا يوجد حل.

5) $y=6x$, $x^2+y^2=9$ $(0.493, 2.959)$

6) $x=7+y$, $y=3x^2-2$ لا يوجد حل.

إرشادات للمعلم

يمكن إعادة توزيع الطلبة في بعض المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أتدرب)؛ تعزيزًا لتبادل الخبرات بينهم.

الدرس 1

فكرةُ الدرس

- حل نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية.
- حل مسائل رياضية وحياتية باستعمال أنظمة المعادلات.

التعلم القبلي:

- نظام المعادلات وحله.
- عدد حلول النظام.

1 التهيئة

- اكتب نظام المعادلات، الآتي على السبورة: $xy = 10$ ، $x + y = 7$ واسأل الطلبة:
  - » بماذا يختلف هذا النظام عن ما تعرفونه؟
  - » كيف يمكن حله باعتقادكم؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، واسألهم دائما: من يؤيد الإجابة؟ لماذا؟ من لديه إجابة أخرى؟ اذكرها. وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم.
- ثم وضح لهم أنهم سيتعرفون على حل مثل هذا النظام في هذا الدرس.

2 الاستكشاف

- اطلب إلى الطلبة قراءة (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » لماذا عُبِّر عن الطريق المستقيم بمعادلة خطية، وعن الطريق المنحني بمعادلة تربيعية؟ لأن التمثيل البياني للمعادلة الخطية خط مستقيم، والتمثيل البياني للمعادلة التربيعية قطع مكافئ.
  - » هل يمكن معرفة إذا كان الطريقان متقاطعين أم لا؟ نعم، يمكن معرفة ذلك عن طريق التمثيل البياني.
  - » هل يمكن إيجاد نقاط تقاطع الطريقين من دون تمثيلهما بيانيًّا؟ نعم، يمكن إيجاد ذلك جبريًّا.
  - » هل يمكن لحل النظام في هذه المسألة أن يساعد المهندسين؟ نعم، يمكن أن يساعدهم على تخطيط الطرق والجسور والدواوير المرورية وغير ذلك.

الدرس 1

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ

Solving a System of Linear and Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ.

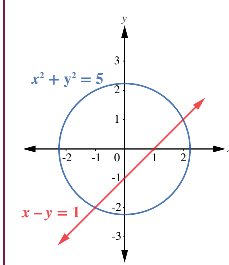
مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخلَ إحدى المدنِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرَ منحنيًا داخلَ المدينةِ نفسِها. هلْ يتقاطعُ هذانِ الطريقانِ أمْ لا؟

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلكَ بكتابةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في المعادلةِ الخطِّيةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمَّ تعويضِهِ في المعادلةِ التربيعيةِ وحَلِّها.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$



يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra)، أوْ حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ كما في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ. أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في نقطتيْنِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$x - y = 1$	المعادلةُ الخطِّيةُ
$y = x - 1$	بكتابةِ y بدلالةِ x
$x^2 + (x - 1)^2 = 5$	بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ
$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$	بفكِّ القوسيْنِ
$2x^2 - 2x - 4 = 0$	بالتبسيطِ
$x^2 - x - 2 = 0$	بالقسمةِ على 2

لِحَلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = -1, c = -2$:

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

في ما يأتي بعض المصطلحات التي يمكن التركيز عليها:

المعادلة equation

المعادلة التربيعية quadratic eqation

نظام المعادلات system of equations

ملاحظات المعلم

3 التدريس

- اكتب معادلة خطية (linear equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب معادلة تربيعية (quadratic equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها بطريقتين مختلفتين (القانون العام، والتحليل).
- مثِّل المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية بيانيًّا، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة الخطية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  - » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة التربيعية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  - » ما عدد نقاط التقاطع (intersection points) ؟
  - » ماذا تُمثِّل هذه النقاط للمنحنيين معًا؟
- اطلب إلى الطلبة اقتراح طريقة جبرية لإيجاد نقاط التقاطع.
- امنح الطلبة (3–2) دقائق لمحاولة حل السؤال جبريًّا.

مثال 1

- ابدأ بشرح المثال الذي يتناول حل نظام معادلات له حلان مختلفان، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- بيِّن للطلبة أنه يمكن جعل x موضوعًا للقانون بدلًا من y.
- حل المعادلة التربيعة على اللوح مُستعمِلًا القانون العام، وبيِّن للطلبة أنه يمكن حلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى، مثل: **(4, 3)** الذي يُحقِّق **المعادلة الخطية** فقط، أو **(1, 2)** الذي يُحقِّق **المعادلة التربيعية**.
- أخبِر الطلبة أنه يوجد حلان للنظام، وأن ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام، ثم اكتب على اللوح الحلين في أزواج مرتبة واضحة.

إرشادات:

- في المثال 1، وجِّه الطلبة إلى استعمال الأقواس في خطوة التعويض (substitute)، وشجِّعهم على كتابة كل خطوة من خطوات الحل بوضوح.
- أرشِد الطلبة إلى إيجاد المميز (discriminant) للمعادلة التربيعية؛ لتحديد عدد حلولها، ثم تحديد عدد حلول النظام.

القانونُ العامُّ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

بالتعويضِ $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}$

بالتبسيطِ $x=-1\ ,x=2$

الحالةُ الأولى: عندما $x=-1$:

$y=x-1$

بتعويضِ $x=-1$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y=-1-1=-2$

الحَلُّ الأولُ: $(x, y)=(-1, -2)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأولِّ، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(-1, -2)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x-y=-1-(-2)=1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2+y^2=(-1)^2+(-2)^2=1+4=5$ ✓

الحالةُ الثانيةُ: عندما $x=2$:

بتعويضِ $x=2$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y=2-1=1$

الحَلُّ الثاني: $(x, y)=(2, 1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(2,1)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ $x-y=2-1=1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ $x^2+y^2=(2)^2+(1)^2=4+1=5$ ✓

أَتذكَّرُ

توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

إرشادٌ

يجبُ تعويضُ الحَلِّ في كلتا معادلتَيِ النظامِ؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المعادلتيْنِ منْ دونِ الأُخرى.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: (2, 8), (-9, 30)

$2x+y=12$

$y=x^2+5x-6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حَلٌّ واحدٌ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

التقويم التكويني:

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- اطلب إلى أفراد المجموعات حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**)؛ على أن يحل أفراد بعض المجموعات السؤال باستعمال القانون العام، ويحل أفراد بعضها الآخر السؤال نفسه باستعمال طريقة التحليل.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم المجموعة التي أخطأت في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجها.

أخطاء مفاهيمية :

- قد يخطئ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في التمييز بين المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية؛ لذا، وجِّههم باستمرار.
- قد يخطئ بعض الطلبة في إشارات الحدود عند إعادة ترتيب المعادلة الخطية؛ لذا نبِّههم إلى هذا الخطأ باستمرار، واجعلهم يعتادون التحقق.
- قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في حساب قيمة المميز (discriminant)؛ لذا ذكِّرهم بصيغته الرياضية، مؤكِّدًا أهمية كتابة المعادلة التربيعية بالصورة الآتية:

$$ax^2+bx+c=0$$

ليسهل عليهم تحديد قيمة كل معامل بصورة صحيحة.

ثم ذكِّرهم بالحالات الثلاث:

المميز >0: يوجد حلان حقيقيان.

المميز$=0$: يوجد حلان متماثلان (حل حقيقي).

المميز <0: لا توجد حلول حقيقية.

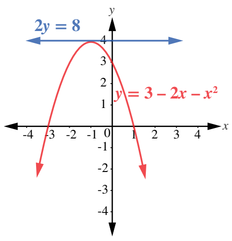
مثال 2

- ابدأ بشرح المثال الذي يتناول حل نظام له حل واحد، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- حـل المعادلة التربيعه مُسـتعمِلًا طريقة التحليل الى العوامل، ثم اسأل الطلبة:
  - » هـل يمكن حـل المعادلة بطريقة أخـرى؟ نعم، يمكن حلها باستعمال طريقة القانون العام.
- أخبِر الطلبة أنه يوجد للنظام حل واحد فقط، وأن ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام.
- اكتب على اللوح الحل في زوج مرتب واضح.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى.

مثال 2

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$2y = 8$$
$$y = 3 - 2x - x^2$$



عندَ تمثيلِ معادلتَي النظامِ على المســتوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ كمــا في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلًّا واحــدًا فقطْ. أَتَحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$2y = 8$
بالقسمةِ على 2	$y = 4$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$4 = 3 - 2x - x^2$
بالتبسيطِ	$x^2 + 2x + 1 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ باستعمالِ طريقةِ التحليلِ إلى العواملِ. هلْ توجدُ طريقةٌ أُخرى؟

بالتحليلِ	$(x+1)(x+1) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x + 1 = 0$
بحَلِّ المعادلةِ	$x = -1$

أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y :

المعادلةُ التربيعيةُ	$y = 3 - 2x - x^2$
بتعويضِ قيمةِ x	$y = 3 - 2(-1) - (-1)^2$
	$y = 4$

إذنْ، حَلُّ النظامِ هوَ الزوجُ المُرتَّبُ $(-1, 4)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$4 \stackrel{?}{=} 3 - 2(-1) - (-1)^2$$
$$4 = 4 \checkmark$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: (0, -2)

$$y = x^2 - 2$$
$$y + 2 = 0$$

التقويم التكويني:

- وزِّع الطلبــة إلى مجموعات، ثم أعــطِ كلَّ مجموعة رقمًا.
- وجِّه أفــراد المجموعات ذوات الأرقــام الفردية إلى حــل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) باســتعمال طريقة التحليــل، ووجِّه أفــراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل التدريب نفســه باســتعمال القانون العام.
- اختر بعض الإجابات التي تحــوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم المجموعة التي أخطأت في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجها.

إرشادات:

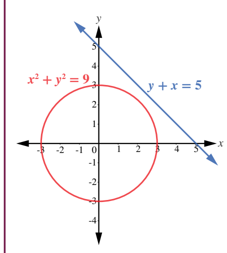
- في المثال 2، ذكِّر الطلبة بكيفية تحليل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشارة كل من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل أقواس التحليل.
- في تدريب (أتحقق من فهمي) للمثال 2، أرشِــد الطلبة إلى استعمال مميز المعادلة التربيعية للتأكُّد أن لها حلًّا وحيدًا، ونوِّه دائمًا بتأثير ذلك في عدد حلول النظام.

لاحظْتُ في المثالَيْنِ السابقيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليسَ لها حَلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y + x = 5$$
$$x^2 + y^2 = 9$$



يَتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتَحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ: $y + x = 5$

بكتابةِ x بدلالةِ y: $x = 5 - y$

بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ: $(5-y)^2 + y^2 = 9$

$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$

بالتبسيطِ: $2y^2 - 10y + 16 = 0$

لِحَلِّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ:

$a = 2, b = -10, c = 16$:

القانونُ العامُّ: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالتعويضِ: $$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(16)}}{2(2)}$$

بالتبسيطِ: $$x = \frac{10 \pm \sqrt{-28}}{2}$$

ألاحِظُ أنَّهُ عندَ تعويضِ قيمِ a، وَ b، وَ c في القانونِ العامِّ، ينتجُ جذرٌ تربيعيٌّ لعددٍ سالبٍ.

إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتذكَّرُ

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$x - y = 0$

$y = x^2 + 3x + 2$

لا يوجد حل للنظام.

13

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 3، قد يحسب بعض الطلبة الجذر التربيعي لعدد سالب، مثل $\sqrt{-4} = -2$؛ لذا ذكِّرهم بمفهوم الجذر التربيعي للعدد، واطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه، ويكون ناتجه سالبًا؛ لإقناعهم بأن ذلك غير ممكن.

مثال 3

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أعطِ كلَّ مجموعة رقمًا.
- وجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الفردية إلى حل المثال بجعل x موضوعًا للقانون، ووجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل المثال نفسه بجعل y موضوعًا للقانون.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش الطلبة في إجاباتهم، بطرح الأسئلة الآتية:
  » ما عدد حلول المعادلة التربيعية الناتجة؟ برِّر إجابتك. لا يوجد حل للمعادلة؛ لأن مميزها صفر.
  » هل يوجد حل للنظام؟ برِّر إجابتك. لا، لا يوجد حل للنظام؛ لأنه لا يوجد حل للمعادلة التربيعية الناتجة من استعمال طريقة التعويض.
  » هل يُؤثِّر المتغير الذي تجعله موضوعًا للقانون في حل النظام؟ برِّر إجابتك. لا، لا يؤثر؛ لأن جعل x أو y موضوعًا للقانون يُنتِج معادلة مميزها سالب.
- اطلب إلى الطلبة اقتراح حلول وتعويضها في المعادلتين للتحقُّق من عدم وجود حل للنظام.
- أكِّد عدم وجود حل للنظام باستعمال التمثيل البياني الموجود.

تنويع التعليم:

- وجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$xy = 2$$
$$y = x + 1$$

إرشاد: بعد حل مثال 3، الفت انتباه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا (في البيت، أو في مختبر الحاسوب، أو باستعمال الهواتف الذكية).

مثال 4: من الحياة

- لخِّص حالات حلول نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ثم ناقِش الطلبة فيها، واسألهم:
  » هل يوجد نظام من معادلتين خطية وتربيعية له ثلاثة حلول؟
  » لماذا؟
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟

  لا، لا يوجد نظام من معادلتين خطية وتربيعية له ثلاثة حلول، ويمكن تقديم التبرير عن طريق الرسم.

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في المثال الرابع، ثم اسألهم:
  » من لديه معلومات عن صناعة السجاد في الأردن، وفي العالَم؟
- ابدأ بشرح المثال الحياتي، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة، مُركِّزًا على كيفية تحديد المتغيرات، وتكوين المعادلات، وتدريب الطلبة على تحديد معطيات المسألة.
- اكتب على اللوح نظام المعادلات الذي يُعبِّر عن المسألة، ووجِّه الطلبة إلى حله.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 4، يخطئ بعض الطلبة بعدم استثناء القيم السالبة من الحل؛ لذا ذكِّرهم أن قيم x، وy هنا تُمثِّل طول السجادة وعرضها.

نتيجةٌ

لأيِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ، تكونُ واحدةٌ منَ العباراتِ الآتيةِ صحيحةً:

1. وجودُ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ.
2. وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ.
3. عدمُ وجودِ حَلٍّ.

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ الأنظمةِ التي تتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

مثال 4: من الحياة

سَجّادةٌ مصنوعةٌ يدويًّا، مجموعُ بُعْدَيْها 7 m، وطولُ قُطْرِها 5 m. أَجِدُ كُلًّا منْ طولِها، وعرضِها.

قدْ تستغرقُ صناعةُ السَّجّادةِ اليدويةِ الصغيرةِ 4 أشهرٍ منَ العملِ المُتواصِلِ.

لإيجادِ بُعْدَيِ السَّجّادةِ، أَكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ المسألةَ، ثمَّ أَحُلُّهُ.

أفترضُ أنَّ طولَ السَّجّادةِ هوَ x، وأنَّ عرضَها هوَ y، وبما أنَّ مجموعَ بُعْدَيِ السَّجّادةِ هوَ 7 m، فإنَّ: $x + y = 7$، وبما أنَّ قُطْرَ السَّجّادةِ هوَ 5 m، فإنَّ (باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$، إذنْ، أصبحَ لديْنا نظامٌ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

$$y + x = 7$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

والآنَ، سأَحُلُّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$x + y = 7$	المعادلةُ الخطِّيةُ
$y = 7 - x$	بكتابةِ y بدلالةِ x
$x^2 + (7 - x)^2 = 25$	بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ
$2x^2 - 14x + 24 = 0$	بالتبسيطِ
$x^2 - 7x + 12 = 0$	بالقسمةِ على 2

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ إلى العواملِ:

$(x - 4)(x - 3) = 0$	بالتحليلِ
$x - 4 = 0$ او $x - 3 = 0$	خاصيةُ الضربِ الصفريِّ
$x = 4$ او $x = 3$	بحَلِّ كلِّ معادلةٍ

أَتذكَّرُ
أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ التحليلِ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ.

أُعوِّضُ قيمَ x في المعادلةِ الخطِّيةِ لإيجادِ قيمِ y:

بتعويضِ قيمةِ $x = 3$ في المعادلةِ الخطِّيةِ	$y = 7 - 3$
قيمةُ y الأولى	$y = 4$
بتعويضِ قيمةِ $x = 4$ في المعادلةِ الخطِّيةِ	$y = 7 - 4$
قيمةُ y الثانيةُ	$y = 3$

إذن، حَلُّ النظامِ هوَ: $(4, 3)$ وَ $(3, 4)$.

بما أنَّ طولَ السَّجّادةِ أكبرُ منْ عرضِها، فإنَّ الطولَ هوَ 4 m، والعرضَ هوَ 3 m

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطرِها 50 m، ومحيطُها 140 m. أَجِدُ بُعْدَيِ المزرعةِ. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 6x - 3$, $y = 2x - 3$ — $(0, -3), (-4, -11)$

2) $y = x^2 + 4x - 2$, $y + 6 = 0$ — $(-2, -6)$

3) $y = x^2 + 4$, $x - y = -1$ — لا يوجد حل للنظام.

4) $y = x^2 + 5x - 1$, $2x + 3y = 1$ — $(-5.89, 4.26), (0.226, 0.18)$

5) $y = x^2 + 4x + 7$, $y - 3 = 0$ — $(-2, 3)$

6) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = x$ — لا يوجد حل للنظام.

7) $x^2 + y^2 = 8$, $2x + 3y = 7$ — $(2.788, 0.47), (-0.63, 2.756)$

8) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 0$ — $(-1, 0)$

9) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 5$ — لا يوجد حل للنظام.

10) $x^2 + y^2 = 10$, $x - y = 2$ — $(-1, -3), (3, 1)$

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$, $x = 1$ — $(1, -3), (1, 5)$

12) $(x - 1)^2 = 4$, $y = 5 - x$ — $(3, 2), (-1, 6)$

13) **بركةٌ**: بركةُ ماءٍ قاعدتُها مستطيلةُ الشكلِ، ومحيطُها 16 m، والفرقُ بينَ مربَّعَيْ بُعْدَيْها 16 m^2. أَجِدُ بُعْدَيْها. انظر الهامش

14) **أعدادٌ**: أَجِدُ العددَيْنِ الموجبيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24 انظر الهامش

15) **هندسةٌ**: دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما 12π cm، ومجموعُ مساحتَيْهِما $20\pi\text{ cm}^2$. أَجِدُ قُطْرَ كلٍّ منْهُما. انظر الهامش

15

إجابات:

(**أتحقق من فهمي 4**): افترض أن طول المزرعة هو x، وأن عرضها هو y:

$$x^2 + y^2 = 2500$$
$$2x + 2y = 140$$
$$\Rightarrow (x, y) = (40, 30)$$

13) افترض أن الطول هو x ، وأن العرض هو y:

$$2x + 2y = 16$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

الحل: $(5, 3)$

14) افترض أن العدد الأول هو x، وأن العدد الثاني هو y:

$$x + y = 12$$
$$x^2 - y^2 = 24$$

الحل: $(7, 5)$

15) قطر الدائره الأولى r_1 ، قطر الدائره الثانية r_2

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 12\pi$$
$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 24\pi$$
$$r_1 = 2, r_2 = 4$$

إرشاد: ذكِّر الطلبة بقانون فيثاغورس قبل البدء بحل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 1 إلى 18، وتابِعهم في هذه الأثناء.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إليهم حل مسائل مهارات التفكير العليا.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش أفراد المجموعات في حلولها.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

إرشاد: ذكِّر الطلبة بقانوني محيط الدائرة، ومساحة الدائرة قبل البدء بحل السؤال 15.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

مهارات التفكير العليا

- أشـرِك الطلبــة كافةً في حــل هذه المســائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّــر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّن الطلبــة كافة من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلــب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

5 الإثراء

- وجِّه بعض الطلبة – بعد مناقشــة المثال الرابع – إلى البحث في شــبكة الانترنت أو مكتبة المدرســة عن صناعة البسط في التراث الأردني، ثم كتابة تقرير عن ذلك، ثم قراءته في الإذاعة المدرسية.
- وجِّه بعض الطلبة إلى البحث في شــبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيق حياتي على نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية، وحله.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة توثيق مصدر المعلومة دائمًا.

التوسُّع:

- وجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$x\,y = 2 \qquad y = x + 1$$

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى استكمال الخطوة الثانية من المشروع، ومحاولة الانتهاء من جمع الصور، وإيجاد معادلات المنحنيات التي اختاروها من الصور التي اعتمدوها.

6 الختام

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة.
- أحضِــر صندوقين، يحوي الأول عِــدَّة بطاقات كُتِب على كل منهــا معادلة خطيــة، ويحــوي الثاني عِدَّة بطاقات كُتِب على كل منها معادلة تربيعية.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد مُمثِّل لها؛ ليختار بطاقــة من كل صنــدوق، ثم يحل أفــراد المجموعة النظام المكون من المعادلتين بأسرع وقت ممكن.
- الفت انتباه أفراد كل مجموعة إلى أنه يمكن لهم إعادة اختيار بطاقة واحدة فقط من أحد الصندوقين في حال حصلوا علــى نظام له عدد لا نهائي مــن الحلول، أو ليس له حل.

---

16 **أعمارٌ:** قالَتْ شــيماءُ: «عُمْري أكبرُ بأربعِ ســنواتٍ منْ عُمْرِ أخي ريّانَ، ومجموعُ مُربَّعَــيْ عُمْرَيْنا هوَ 346». ما عُمْرُ شيماءَ؟ انظر ملحق الإجابات.

17 **لوحــةٌ:** لوحةٌ مســتطيلةُ الشــكلِ، طولُها يســاوي مِثْلَيْ عرضِها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m ، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفةُ المترِ المربعِ الواحدِ منْهُ بالدينارِ 2.25 . أَجِدُ تكلفةَ الإطارِ. انظر ملحق الإجابات.

18 **زراعةٌ:** قسَّمَ فيصلٌ 41m^2 منْ مزرعتِهِ إلى منطقتيْنِ مربَّعتَيِ الشكلِ، ثمَّ زرعَهُما بمحصولَيِ الطماطمِ والبطاطا. إذا زادَ بُعْدُ المنطقةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعْدِ المنطقةِ المزروعةِ بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟ انظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا 24-19 انظر ملحق الإجابات.

19 **تبريرٌ:** صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منْها الماءُ بحسبِ العلاقةِ: $y + x^2 = 10$، إذا وُضِعَتْ وحدةُ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: $y = 12 + x$، فهلْ يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟

20 **تحدٍّ:** إذا علمْتُ أنَّ المعادلةَ الخطِّيةَ: $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

21 **تحدٍّ:** أجِدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $5x - 6 < 3x^2 - 7x + 2$، بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 3x^2 - 7x + 2$$
$$y = 5x - 6$$

مسألةٌ مفتوحةٌ: أَكتبُ ثلاثَ معادلاتٍ خطِّيةٍ تُكوِّنُ كلٌّ منْها معَ المعادلةِ التربيعيةِ: $y = x^2$ نظامًا يُحقِّقُ إحدى الحالاتِ الآتيةِ:

22 يوجدُ حَلّانِ للنظامِ.

23 يوجدُ حَلٌّ واحدٌ للنظامِ.

24 لا يوجدُ حَلٌّ للنظامِ.

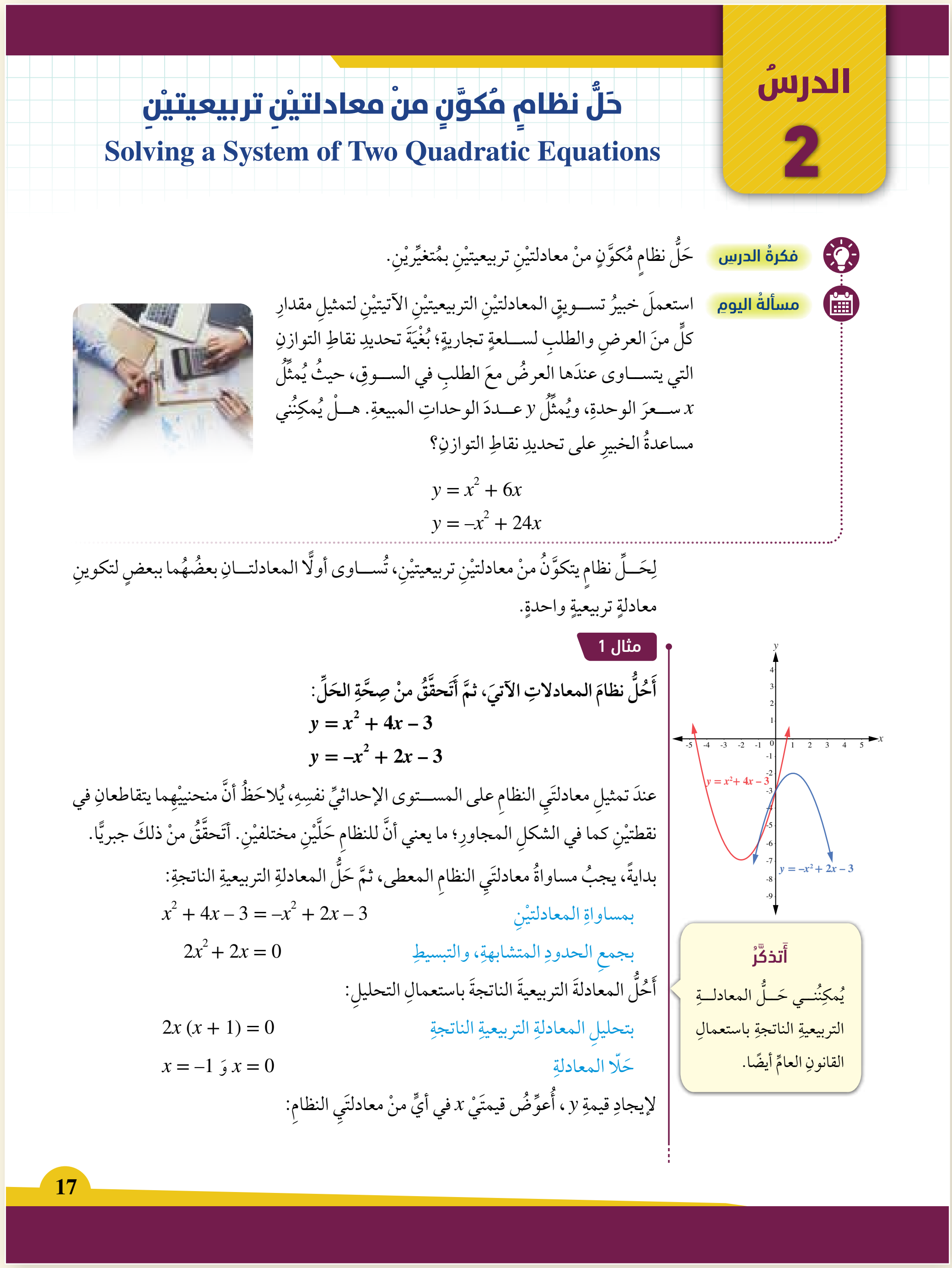
16

إرشاد:

يمكن حل السؤال رقم 21 بيانيًّا بالاستعانة برمجية جيوجبرا، وتوضيح منطقة الحل بيانيًّا (المنطقة التي يقع فيها منحنى المعادلة التربيعية فوق منحنى المعادلة الخطية – الخط المستقيم).

تنبيه!

في السؤال 17 نبه الطلبة إلى وجود خطأ في السؤال واطلب إليهم اكتشافه. الخطأ هو كتابة كلمة (المربع) بدل (الطولي). اطلب الى الطلبة تعديلها على كتبهم.



الدرس 2

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ
Solving a System of Two Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.

مسألةُ اليومِ استعملَ خبيرُ تسويقِ المعادلتيْنِ التربيعيتيْنِ الآتيتيْنِ لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عددَ الوحداتِ المبيعةِ. هلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

$$y = x^2 + 6x$$
$$y = -x^2 + 24x$$

لِحَلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، تُساوى أولًا المعادلتانِ بعضُهما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$\mathbf{y = x^2 + 4x - 3}$$
$$\mathbf{y = -x^2 + 2x - 3}$$

عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ منحنييْهما يتقاطعانِ في نقطتيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$2x^2 + 2x = 0$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

$2x(x + 1) = 0$ بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ

$x = 0$ وَ $x = -1$ حَلّا المعادلةِ

لإيجادِ قيمةِ y ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

أَتذكَّرُ
يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

17

الدرس 2

فكرةُ الدرس

- حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين بمتغيرين.
- تعرف عدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين.
- حل مسائل رياضية وحياتية على أنظمة المعادلات.

التعلم القبلي:

- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين.
- حل معادلة تربيعية بالقانون العام والتحليل.
- حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بمفهوم كل من: نظام المعادلات (system of equations)، وحل النظام، ثم ذكرهم بعدد الحلول التي يمكن إيجادها عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًّا، وارتباطها بوضع المستقيمين في المستوى الإحداثي (حل واحد في حالة التقاطع، وعدم وجود حلول في حالة التوازي، وعدد لا نهائي من الحلول في حالة تطابق المستقيمين). ثم ذكرهم بعدد الحلول الممكنة في حالة النظام المكون من معادلة تربيعية وأخرى خطية (عدم وجود حل، أو وجود حل واحد، أو وجود حلين)، وارسم على اللوح تمثيلات تقريبية تُوضِّح الحالات الثلاث.
- اطلب إلى أحد الطلبة كتابة معادلة تربيعية على السبورة، ثم اكتب المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ ووضح لهم أنه تكون لدينا نظام من معادلتين، واسألهم:
  - » ما اسم نظام المعادلات الذي أمامكم على السبورة؟
  - » كيف يمكن حله باعتقادكم؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، واسألهم دائما: من يؤيد الإجابة؟ لماذا؟ من لديه إجابة أخرى؟ اذكرها. وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. ثم وضح لهم أنهم سيتعرفون على حل مثل هذا النظام في هذا الدرس، واكتب عنوانه على السبورة.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة (مسألة اليوم) الواردة في بداية الدرس (امنحهم دقيقة أو دقيقتين لذلك).
- اكتب على اللوح المعادلتين الواردتين في المسألة.
- اسأل الطلبة: ما نوع المعادلات في هذا النظام؟
- ثم اسألهم: كيف يمكن حل هذا النظام؟
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجع الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

- اطرح السؤال الآتي على الطلبة:
  » عندما يتكون نظام المعادلات المراد حلّه من معادلتين تربيعيتين two quadratic equations – مثل الحالة التي في مسألة اليوم – ما عدد الحلول التي يمكنك الحصول عليها؟ لماذا؟
- امنح الطلبة بعض الوقت لتقديم إجاباتهم وتبريرها. وإذا أجاب أحدهم إجابة معينة ولتكن (حلّين) اطلب إليه توضيح إجابته بتمثيل بياني تقريبي.
- وضح للطلبة أن إيجاد إحداثيي نقاط التقاطع -إن وجدت- بالطرق الجبرية هو ما سيتعلمونه في هذا الدرس، وأن إحداثيات نقاط التقاطع intersection points هي (الحلول الممكنة للنظام).

مثال 1

- ناقش حل المثال الذي يوضح طريقة حل نظام من معادلتين تربيعيتين لهما حلان مختلفان على السبورة مراعيا تبرير كل خطوة.
- نبّه الطلبة بعد خطوة مساواة المعادلتين معًا إلى أهمية جعل الطرف الأيمن من المعادلة يساوي صفرًا وتجميع الحدود المتشابهة في الطرف الأيسر منها (أو العكس) ليتمكن من حل المعادلة التربيعية، أكّد أنه لا فرق بين جعل الطرف الأيمن أو الأيسر من المعادلة يساوي صفرًا.
- ذكّر الطلبة بإخراج العامل المشترك common factor كطريقة لتحليل المقادير الجبرية algebraic expressions .
- أكد أنه يوجد للنظام حلّين من خلال التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب وأشّر إلى الحلول على التمثيل البياني (يمكن رسم شكل تقريبي على السبورة).

ملاحظات المعلم

الحالةُ الأولى: إذا كانَتْ $x = 0$:

بتعويضِ $x = 0$ في إحدى المعادلتيْنِ	$y = -(0)^2 + 2(0) - 3$
بالتبسيطِ	$y = -3$

إذنْ، الحَلُّ الأولُ للمعادلةِ هوَ: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالةُ الثانيةُ: إذا كانَتْ $x = -1$:

بتعويضِ $x = -1$ في إحدى المعادلتيْنِ	$y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$
بالتبسيطِ	$y = -6$

إذنْ، الحَلُّ الثاني للمعادلةِ هوَ: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ: $(0, -3)$, $(-1, -6)$.

إرشادٌ

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x وَ y في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(1, 0), (-3, 0)$

$y = -x^2 - 2x + 3$

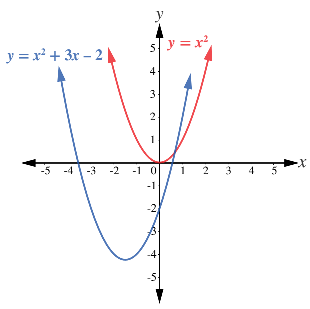
$y = x^2 + 2x - 3$

قدْ يتقاطعُ منحنيا معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وعندئذٍ يكونُ لنظامِ المعادلاتِ الذي تُكوِّنُهُ هاتانِ المعادلتانِ حَلٌّ واحِدٌ.

مثال 2: من الحياة

سباقاتٌ: في أحدِ سباقاتِ المراحلِ، سلكَ مُتسابِقٌ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ التربيعيةُ: $y = x^2$ في حينِ سلكَ مُتسابِقٌ آخرُ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ: $y = x^2 + 3x - 2$. أَجِدُ نقطةَ التقاطعِ بينَ مسارَيِ المُتسابِقيْنِ.

تُجرى سباقاتُ المراحلِ على مدارِ أيامٍ، وهيَ تقامُ على مساراتٍ متنوعةٍ منْ حيثُ التضاريسُ، مثلِ: الطرقِ المُنبسِطةِ، والطرقِ الجبليةِ.



عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ بينَ منحنيَيْهِما؛ ما يعني أنَّ لنظامِ المعادلاتِ حَلًّا واحدًا. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

18

إرشاد: قد يتساءل بعض الطلبة عن سبب وجود مسارين مختلفين في مسألة السباقات؛ لذا أخبرهم أن ذلك لا يعني بالضرورة اختلاف المسافة التي يقطعها كل متسابق.

التقويم التكويني:

- اطلب إلى الطلبة حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات غير متجانسة).
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

في تدريب (أتحقق من فهمي) قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في جعل أحد طرفي المعادلة يساوي صفرًا، فيحذفون -مثلًا- x^2 و $-x^2$؛ لذا أكِّد باستمرار وجوب إضافة النظير الجمعي إلى الحدود في طرفي المعادلة.

مثال 2: من الحياة

- أسأل الطلبة:
  - » أيكم يركب درّاجة؟
  - » ماذا تعرفون عن سباقات المراحل؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، وشجِّعهم على الحديث عن تجاربهم الشخصية؛ لتعزيز مهارات التواصل.
- ناقِش الطلبة في مسألة السباقات الواردة في المثال، مُؤكِّدًا أن تطبيقات أنظمة المعادلات التربيعية متعددة في حياتنا.
- ناقِش الطلبة في حل المثال الذي يعرض حل نظام من معادلتين تربيعيتين له حل واحد.
- نبِّه الطلبة – بعد خطوة مساواة المعادلتين معًا– إلى إمكانية التخلُّص من الحد x^2 من الطرفين (بإضافة النظير الجمعي)، ثم تجميع الحدود التي تحوي x في الطرف الأيسر، ثم اسألهم:
  - » كم عدد حلول النظام؟ لماذا؟ عدد حلول النظام هو حل واحد؛ لأنه ينتج من المعادلة الخطية حل واحد فقط.
- استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب للتحقُّق من صحة الحل، وتأكيد وجود حل واحد للنظام، ثم اكتب الحل في صورة زوج مرتب عند نقطة التقاطع (يمكنك رسم منحنيي المعادلتين بصورة تقريبية على اللوح).

$x^2 + 3x - 2 = x^2$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$ بطرحِ x^2 منْ كلا الطرفيْنِ

$3x - 2 = 0$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

$x = \frac{2}{3}$

بعدَ ذلكَ أَجدُ قيمةَ y، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$

$y = \frac{4}{9}$ بالتبسيطِ

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$، ونقطةُ تقاطعِ المنحنييْنِ هيَ: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

رياضةُ التزلُّجِ هيَ إحدى أسرعِ الرِّياضاتِ غيرِ الآليةِ؛ فقدْ تصلُ سرعةُ المُتزلِّجِ إلى 200 km/h

أتحقق من فهمي

تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 + 2x$ مسارَ مُتزلِّجٍ على الجليدِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أَبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ. $\left(\frac{5}{3}, \frac{55}{9}\right)$

عرضْنا في المثاليْنِ السابقيْنِ أنظمةَ معادلاتٍ تربيعيةٍ لها حَلّانِ أَوْ حَلٌّ واحدٌ. ولكنْ، هلْ يوجدُ دائمًا حَلٌّ للنظامِ المُكوَّنِ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y = x^2 + x + 2$$
$$y = -x^2 - x + 1$$

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ عدمُ وجودِ نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ لإيجادِ قيمةِ x:

$x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

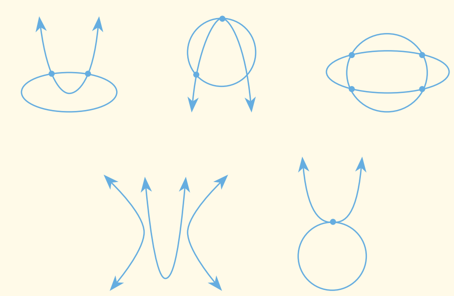
$2x^2 + 2x + 1 = 0$ بالتبسيطِ

✓ إرشادات عامة:

- أكِّد دائمًا أهمية التحقُّق من صحة الحل.
- أكِّد علـى عدد حلول النظام الناتجة في كل مرة، واربط ذلك بالخطوة المناسبة من خطوات الحل الجبري.

مثال 3

- بيِّن للطلبة عدد الحلول التي نوقشت في المثالين،1، 2 واسألهم هل تتوقعون وجود حالات أخرى لعدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين؟
- استمع لإجابات الطلبة ووضح لهم مع الرسم على السبورة الحالات الخمس التـي تُمثِّل عدد الحلول الممكنة (possible solutions)، وهي تتراوح بين 0 (لا تقاطع)، و 4 (أربع نقاط تقاطع)، مثل الحالات في الشكل الآتي:



- اطلب إلى الطلبة رسم تمثيلات تقريبية غير تلك التي عُرِضت عليهـم للحالات المختلفة لعـدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين.
- ناقِش الطلبة في حل المثال الثالث الذي يعرض نظامًا من معادلتين تربيعيتين ليس له حل حقيقي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أهميـة اختبار المميز للمعادلة التربيعية الناتجة، وذكِّرهم أنه إذا كان المميز أقل من صفر، فإنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة التربيعية؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات التربيعية.
- للتحقُّق من صحة الحل، استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب. (يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح).

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا.

قيمُ المعاملاتِ هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويضِ في المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أَتذكَّرُ

يعتمدُ عددُ جذورِ المعادلةِ وأنواعُها علــى قيمةِ المُميِّزِ الذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (Δ)، حيثُ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: لا يوجد حل للنظام.

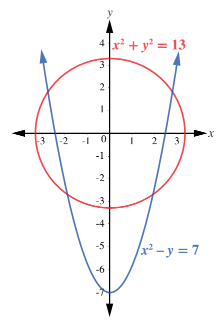
$$y = x^2 + 4$$
$$y = -x^2 + 2$$

عرضْنا في الأمثلةِ الســـابقةِ أنظمةً لها حَلّانِ، أوْ حَلٌّ واحدٌ، أوْ ليسَ لها حَلٌّ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامٌ مُكوَّنٌ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، لهُ ثلاثةُ حلولٍ، أوْ أربعةٌ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$



عنــدَ تمثيــلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشــكلِ المجــاورِ، يُلاحَظُ وجودُ 4 نقــاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلتيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

يظهرُ المُتغيِّرُ x في كلتا المعادلتيْنِ بالقوَّةِ نفسِــها؛ لذا يُمكِنُني استعمالُ الحذفِ للتخلُّصِ منْ هذا المُتغيِّرِ، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ التي تحوي مُتغيِّرًا واحدًا هوَ y:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$(-) \quad x^2 - y = 7$$
$$y^2 + y = 6 \qquad \text{بالطرحِ}$$
$$y^2 + y - 6 = 0 \qquad \text{بطرحِ 6 منْ كلا الطرفيْنِ}$$

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أوِ التحليلِ:

$$(y + 3)(y - 2) = 0 \qquad \text{بالتحليلِ}$$

إذنْ: $y = -3 , y = 2$

أُعوِّضُ قيمتَيْ y في إحدى معادلتَيِ النظامِ لإيجادِ قيمِ x:

$$x^2 = -3 + 7 \qquad \text{بتعويضِ قيمةِ } y = -3$$

20

إرشاد:

في المثال 4، ذكِّر الطلبة بكيفية تحليل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشارة كل من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل قوسي التحليل.

أخطاء شائعة:

في المثال 4، قــد يخطئ بعض الطلبة عند كتابة الحلول في صورة أزواج مرتبة بقلب مواضع الإحداثيين؛ نظرًا إلى اختلاف هذا المثال عن الأمثلة السابقة؛ إذ يجــب إيجاد قيمة y أولاً؛ لذا أكِّد لهم طريقــة الكتابة الصحيحة في صورة (x, y)، ثم وجِّههم إلى إمكانية استعمال أقلام ملونة عند كتابة الأزواج المرتبة كما هو مُبيَّن في كتاب الطالب.

إرشاد:

- في المثال 3، أكِّد ضرورة إيجاد قيمة المميز كلما نتج من مساواة معادلتي النظام معادلة تربيعية في الصورة الآتية: $ax^2 + bx + c = 0$ ؛ للتأكُّد أن المعادلة التربيعية ليس لها حلول حقيقية.
- للتحقُّق من صحة الحل، اطلب إلى الطلبة تمثيل منحنيي معادلتي النظام بيانيًّا باســتخدام برمجية جيوجبرا.

مثال 4

- يحتوي نظام المعادلات في المثال الرابع على معادلتين تربيعيتيــن: الأولى تُمثِّــل معادلة دائــرة (circle)، والثانية تُمثِّــل معادلة قطع مكافئ (Parabola)، وله أربعة حلول مختلفة.
- أخبِر الطلبــة أنه يمكن حل النظام باســتعمال طريقة الحذف(elimination) ، ثم اسألهم:
  - » أيهما أفضل: حذف المتغير x أم المتغير y؟ لماذا؟
  - » لماذا لا يمكن التخلُّص من المتغير y ؟
- ناقِــش الطلبة في حل المثال على اللوح، وشــجِّعهم على تبرير كل خطوة تقوم بها.
- حُلَّ المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل، ثم اسأل الطلبة:
  - » كيف يمكــن التحقُّق من قابلية المعادلة للتحليل؟ ذكِّر الطلبة بالمميز.
- حُلَّ المعادلــة التربيعية باســتعمال القانون العام في الهامش، ثم اسأل الطلبة:
  - » أي الطريقتين تفضلــون: التحليل إلى العوامل أم القانون العام؟ لماذا؟
- أخبِــر الطلبة أنــه يمكن التعويض عــن y في أي من معادلتي النظام للحصول على قيم x المقابلة.
- اكتب جميع الحلول في صورة أزواج مرتبة واضحة.
- للتحقُّق من صحــة الحل، اســتعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب، وعيِّن الحلول عليه.
- (يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح).

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 2$

إذنْ، $x = 2 , x = -2$

بتعويضِ قيمةِ $y = 2$ $x^2 = 2 + 7 = 9$

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 3$

إذنْ، توجدُ أربعةُ حلولٍ للنظامِ، هيَ: $(-3 , -2)$ ، وَ$(-3 , 2)$، وَ $(3 , 2)$ ، وَ$(2 , -3)$.

أَتَحقَّقُ منْ صِحَّةِ هذهِ الحلولِ بتعويضِها في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتَحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: انظر الملحق

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتَحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = 2x^2 + x - 5$ ، $y = -x^2 - 2x - 5$ — $(-1, -4), (0, -5)$

2) $y = x^2 - 4x + 1$ ، $y = -2x^2 - 4$ — لا يوجد حل للنظام.

3) $y = x^2 + 1$ ، $y = 2x^2 - 3$ — $(-2, 5), (2, 5)$

4) $y = x^2 + x + 1$ ، $y = -x^2 + x - 2$ — لا يوجد حل للنظام.

5) $y = -x^2 + 5x$ ، $y = x^2 - 5x$ — $(0, 0) ,(5, 0)$

6) $y = x^2$ ، $y = x^2 + x + 6$ — $(-6, 36)$

7) $y = -x^2 + 6x + 8$ ، $y = -x^2 - 6x + 8$ — $(0, 8)$

8) $x^2 + y^2 = 16$ ، $y = x^2 - 5$ — انظر الملحق

9) $5x^2 - 2y^2 = 18$ ، $3x^2 + 5y^2 = 17$ — $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$

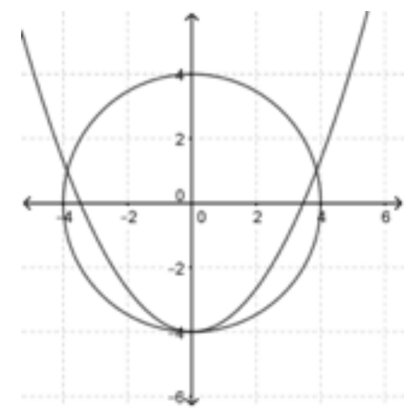
10) أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتَيْنِ: انظر الملحق

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

11) عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟ انظر الهامش

إرشادات:

- في المثال 4، نبِّه الطلبة إلى ضرورة إعادة ترتيب الحدود المتشابهة أسفل بعضها عند استعمال طريقة الحذف؛ ليسهل عليهم تحديد المتغير الذي سيحذفونه.
- للتحقُّق من صحة الحل، وجِّه الطلبة إلى تعويض كل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم اعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.
- وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا -إن أمكن ذلك- للتحقُّق من صحة الحل، حيث سيظهر الشكل الآتي:



- ذكِّر الطلبة بإمكانية تنزيل برمجية جيوجبرا من متجر الهاتف، وتحميله في هواتفهم الذكية.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم ناقِشهم في حل الأسئلة (4, 6, 8, 10, 12, 14) على اللوح، ثم اطلب إليهم حل بعض الأسئلة ضمن مجموعات ثنائية.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

إرشاد: وجِّه الطلبة إلى استعمال القانون العام والآلة الحاسبة في حل السؤالين: 8، و10.

إجابات:

11) افترض أن العدد الأول هو x ، وأن العدد الثاني هو y:

$$x^2 + y^2 = 89$$
$$x^2 - y^2 = 39$$

بحل نظام المعادلات التربيعية، ينتج:

$(8,5), (-8, 5), (8, -5), (-8, -5)$

12 **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسـيًّا في الوقتِ نفسِـهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+12t+10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+4t+42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ. $t=4\ sec, y=25m$

13 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَسـتعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتسـاوى عندَها العرضُ والطلبُ. انظر الملحق

14 **أراضٍ:** قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ. انظر الملحق

مهارات التفكير العليا

15 **تبريرٌ:** قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2+y^2=4$$
$$x^2+y^2=9$$

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

لا يمكن إيجاد عددين مجموع مربعيهما يساوي 4، ويساوي 9 في آنٍ معًا.

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ.

توجد إجابات متعددة، منها: $x^2+y^2=9\,, x^2+y=10$

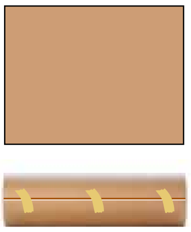
17 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: انظر الملحق

$$x^2-3xy+2y^2=0$$
$$x^2+xy=6$$

18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.

توجد إجابات متعددة، منها: $(x-5)^2+(y-1)^2=4,\ x^2-10x+y=-22$

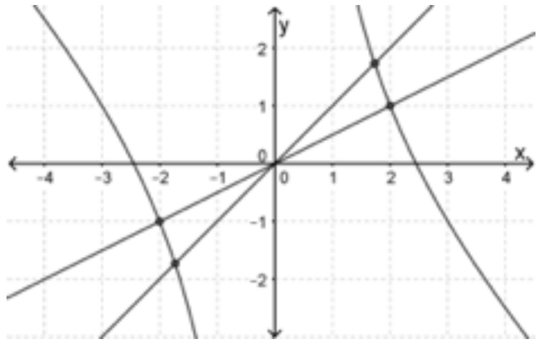
19 **تحدٍّ:** قطعةٌ منْ ورقٍ مُقَوًّى مسـتطيلةُ الشـكلِ، مسـاحتُها $216\ cm^2$، ثُنيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ. انظر الملحق



22

إرشادات:

- بعد حل المسـألة 17، اطلب إلى الطلبة تفسير عدد الحلول، ومحاولة رسم شـكل تقريبي لوضع منحنيي المعادلتين، ثم وجِّههم إلى اسـتعمال برمجية جيوجبرا (في مختبر الحاسوب، أو في البيت، أو باستعمال هواتفهم الذكية) لتمثيل المعادلتين (انظر التمثيل المرفق).



- لحل المعادلة في السـؤال 19، وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا –إن أمكن ذلك–، ثم ناقِشهم في الحل الذي استُبعِد، وسبب استبعاده.

مهارات التفكير العليا

- اطلب إلى الطلبة حل المسـائل 19 ,18 ,17 ,16 ,15 ضمن مجموعات غير متجانسـة، ثـم اطلب إلى أفراد بعضها توضيح كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.

5 الإثراء

- وجه الطلبة إلى حل النظام الآتي:
$$xy=6\ ,\ x^2+y^2=16$$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلـى الطلبة تنفيـذ الإجـراءات المكتوبة في الخطوة الثالثـة؛ وذلك بكتابة نظام معـادلات يُمثِّل منحنيين متقاطعين في كل صورة، ثم اختيار أحد هذه الأنظمــة، وحلها جبريًّا، ثــم التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا.
- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم اختيــار نظامين، وإيجاد حل كل منهما: أحدهما نظام يحوي معادلة خطية ومعادلة تربيعية، والآخر نظام يحوي معادلتين تربيعيتين.
- ذكِّرهم بضـرورة توثيـق خطوات تنفيذ المشــروع بالطريقة التي يرونها مناسـبة، مثل اسـتعمال خاصية طباعة الشاشة.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني النظام المكون من معادلتين تربيعيتين؟
  - » ماذا يُقصَد بحل النظام؟
  - » كم عدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين؟
- اسـتمع لإجابات أكبر عـدد ممكن مـن الطلبة، ثم اسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.

الدرس 3

فكرةُ الدرس

- تعرف الأسس النسبية وخصائصها.
- كتابة مقادير أسية في أبسط صورة.

التعلم القبلي:

- حل مسائل على قوانين الأسس.
- تبسيط الأسس في حدود جبرية.
- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد النسبية.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح تعريف الأس (القوة)، وذكِّر الطلبة بعناصرها.
- اكتب قوانين الأسس الصحيحة (integer exponents)، ووضِّحها بأمثلة.
- بيِّن كيفية تبسيط الحدود الجبرية (algebraic exponential terms) باستعمال قوانين الأسس (laws)، معزِّزًا ذلك بأمثلة.
- خصِّص وقتًا للإجابة عن أسئلة الطلبة.
- اكتب على اللوح عِدَّة جذور، ثم اطلب إلى الطلبة كتابتها في صورة أسس، مستعملين قوانين الأسس.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » أيكم شاهد حديقة مربعة؟
  - » أين شاهد ذلك؟
  - » ما قانون مساحة المربع؟ $A = L^2$
  - » ما مساحة الحديقة؟ $A = (4x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{1}{3}}\, z^4)^2$
  - » هل يمكن كتابة هذا الحد الجبري بصورة أخرى؟ نعم.
  - » اذكرها. يمكن تبسيط هذا الحد، وكتابته في صورة: $A = 16x^{\frac{4}{5}}\, y^{\frac{2}{3}}\, z^8$

الدرس 3

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الأسسِ النسبيةِ وتبسيطُها.

المصطلحاتُ الأُسُّ النسبيُّ.

مسألةُ اليومِ حديقةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ نصفِ ضلعِها مُعطًى بالحدِّ الجبريِّ $2x^{\frac{2}{5}}\, y^{\frac{1}{3}}\, z^4$، ما مساحتُها بالوحداتِ المربَّعةِ؟

مراجعةُ المفاهيمِ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n وَ m عددينِ صحيحينِ موجبينِ $(n > 1)$، فإنَّ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$، إلّا إذا كانَتْ $a < 0$، وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ يكونُ عددًا غيرَ حقيقيٍّ.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{27})^1$ بكتابةِ المقدارَ في صورةِ الجذرِ الثالثِ

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}$ بتحليلِ العددِ 27 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= 3$

2 $4^{\frac{3}{2}}$

$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3$ بكتابةِ المقدارِ في صورةِ الجذرِ التربيعي مرفوعًا للأُسِّ 3

$= (\sqrt{2\times2})^3$ بتحليلِ العددِ 4 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (2)^3$

$= (2 \times 2 \times 2)$ تعريفُ الأسسِ

$= 8$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ:

$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$،

ويُسمّى a الأساسَ، وَ n الأُسَّ.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

3 $(81)^{-\frac{5}{4}}$

$(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$ الصورةُ الجذريةُ

$= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5}$ بتحليلِ العددِ 81 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (3)^{-5}$

$= \frac{1}{(3)^5}$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$ تعريفُ الأسسِ

$= \frac{1}{243}$

4 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

$(-8)^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^7$ الصورةُ الجذريةُ

$= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^7$ بتحليلِ العددِ -8 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (-2)^7$

$= -128$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عـددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $32^{\frac{1}{5}}$ 2   b) $9^{\frac{5}{2}}$ 243   c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$ $\frac{1}{32}$

مراجعةُ المفاهيمِ

خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ a وَ b وعددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n، فإنَّ:

ضربُ القوى	1	$a^n \times a^m = a^{n+m}$
قوَّةُ القوى	2	$(a^n)^m = a^{n \times m}$
قوَّةُ ناتجِ الضربِ	3	$(ab)^n = a^n \times b^n$
قسمةُ القوى	4	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
قوَّةُ ناتجِ القسمةِ	5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$

أخطاء شائعة:

- في المثـــال 1، قد يخطئ بعض الطلبة في دليـــل الجذر، فيكتبون $a^{\frac{m}{n}}$ في صورة $\sqrt[m]{a^n}$؛ لذا نبِّههم إلى خطئهم، مُبيِّنًا لهم الفرق بين a^3، و $a^{\frac{1}{3}}$ مثلًا.
- قد يخطئ بعـــض الطلبة، فيجـــدون الجذر التربيعـــي (أو أي جذر دليله زوجي) لعدد ســـالب؛ لذا بيِّن لهم دائمًا أنه عـــدد غير حقيقي، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفســـه مرتان أو أربع مرات، ويكون الناتج -16 مثلًا؛ لإقناعهم بأن ذلك غير ممكن.

3 التدريس

مثال 1

- اكتـــب تعريـــف الأس النســـبي (rational exponential)، ثم وضِّحه للطلبة مُعزِّزًا بأمثلة.
- اسأل الطلبة:
  - » مـــا معنـــى تبســـيط الأســـس (simplifying exponents)؟ كتابتها في أبسط صورة.
  - » كيف تُبسِّـــط حدًّا جبريًّا مُعطًـــى؟ بتطبيق قوانين الأسس.
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- وذلك لتعزيز مهارات التواصل لـــدى الطلبة (التعبير عن الرأي، واحترام الرأي الآخر).
- ناقِش الطلبة فـــي حل المثال، مُركِّـــزًا على تبرير كل خطوة.

إرشاد:

فـــي المثال 1، ذكِّر الطلبـــة أن $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$، وأن n يُسمّى دليل الجذر.

التقويم التكويني:

- وجِّـــه الطلبة إلى حـــل التدريب في بنـــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

إرشـــاد: في المثال 1، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المســـتوى دون المتوسط صعوبة في استعمال قوانين الأســـس؛ لذا امنحهم بعض الوقت، وزوِّدهم بأمثلة سهلة، مُنوِّهًا إياهم بضرورة تبرير كل خطوة في الحل؛ ما يساعدهم على حفظ قوانين الأسس.

مثال 2

- ناقِش الطلبــة في بند (مراجعــة المفاهيم: خصائص ضرب القوى وقسمتها)، مُركِّزًا على تسمية كل قانون من قوانين الأسس؛ ليسهل عليهم حفظها.
- ابدأ حــل المثال بكتابــة التفاصيل جميعها، واســم القانون في الهامش عند استعماله.
- أكِّد للطلبة أنه يمكن اســتعمال أكثر من قانون في حل المسألة نفسها.

إرشاد: في المثـال 2، قـد يواجـه بعـض الطلبة ذوي المسـتوى دون المتوسـط صعوبـة في إجـراء العمليـات علـى الأعـداد النسـبية؛ لـذا ذكِّرهـم بكيفيـة جمـع الأعـداد النسـبية (rational numbers)، وطرحهـا، وضربهـا، وقسـمتها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المســتوى المتوســط وفوق المتوسط حل السؤال الآتي:

أثبِت صحة ما يأتي:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\,(1 + x^2)$$

الحل:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$$
$$= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)$$
$$= x^{-\frac{1}{2}}\,(1 + x^2)$$

تطبَّقُ خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها التي درسْتُها سابقًا للأسسِ الصحيحةِ على **الأسسِ النسبيةِ** (rational exponents) أيضًا.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}}$

$y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ ضربُ القوى

$= y^{-1}$ بجمعِ الأسسِ

$= \frac{1}{y}$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

2 $(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}$ بالتبسيطِ

$= x^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

3 $(a \times b^2)^{\frac{3}{2}}$

$(a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2\times\frac{3}{2}}$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$= \sqrt{a^3} \times b^3$ الصورةُ الجذريةُ

4 $\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}}$

$\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$ قسمةُ القوى

$= z^{\frac{6}{8}}$ بالتبسيطِ

$= z^{\frac{3}{4}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[4]{z^3}$ الصورةُ الجذريةُ

أَتعلَّمُ

تنقسمُ الجذورُ بحسبِ دليلِ الجـذرِ إلى نوعيْـنِ، هما: الجذورُ الفرديةُ، والجذورُ الزوجيةُ.

5 $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x^{4\times\frac{3}{4}}}{y^{2\times\frac{3}{4}}}$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

$= \frac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$ قوَّةُ القوى

$= \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$ الصورةُ الجذريةُ

6 $\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ تعريفُ الأُسِّ النسبيِّ

$= x^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$ قسمةُ القوى

$= x^{\frac{2}{15}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[15]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$ $\sqrt[21]{a^5}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$ $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$ $y^{\frac{5}{4}} \times z^{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$ $\sqrt[10]{x^{29}}$

e) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{y^3}{\sqrt{x^3}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$ $\frac{1}{\sqrt[35]{x}}$

مفهومٌ أساسيٌّ

تكونُ العبارةُ الأُسِّيَّةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

1 ظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً، وكانَتِ الأسسُ جميعُها موجبةً.

2 لمْ تتضمَّنِ العبارةُ قوَّةَ القوى.

3 كانَتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 2، قد يخطئ بعض الطلبة في تبسيط الأسس السالبة، فيبسطون $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}}$ إلى $x^{-\frac{3}{2}}$؛ لذا، أكِّد لهم ضرورة تغيير إشارة الأس عند نقل التعبير الأسي من المقام إلى البسط أو العكس، ثم تطبيق قوانين الأسس المناسبة لحالة التبسيط.

إرشادات:

- في المثال 2، وضِّح للطلبة خاصية الأس الصفري، ثم أثبِته على اللوح.
- نوِّه لهم بأن: $\frac{x^n}{x^n} = 1$

مثال 3

- اشـــرح ما تعنيه كتابة العبارة الأسية في أبسط صورة، مُوضِّحًا كل شرط بمثال.
- ناقِـش الطلبة في حل المثـال الثالث علـى اللوح، مُستعمِلًا قوانين الأسس النسبية، ثم اطلب إليهم تبرير كل خطوة (لماذا؟).

مثال 3

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\dfrac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$

$\dfrac{6x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\dfrac{6}{2}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right) \times \left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$ قسمةُ القوى

$= 3x^4y^{-1}$ بالتبسيطِ

$= \dfrac{3x^4}{y}$ الأُسُّ السالبُ

2 $\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$

$\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \dfrac{3 \times 6}{9} \times \dfrac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}} \times \dfrac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ ضربُ القوى

$= 2 \times \dfrac{x}{x^1} \times \dfrac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ بالتبسيطِ

$= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$ بقسمةِ القوى

$= 2x^0y^{\frac{3}{2}}$ تعريفُ الأُسِّ الصفريِّ

$= 2\sqrt{y^3}$ الصورةُ الجذريةُ

أَفهمُ

إذا كانَتْ $n = m$ فإنَّ:

$1 = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-n} = a^0$

إذنْ، $a^0 = 1$.

3 $\sqrt[3]{64x^{12}y^3}$

$\sqrt[3]{64x^{12}y^3} = (64x^{12}y^3)^{\frac{1}{3}}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}}$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

$= 4x^4y$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\dfrac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$ $\dfrac{3\sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[4]{x^{17}}}$

b) $\dfrac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$ $\dfrac{250}{\sqrt{x^3} \times \sqrt[42]{y^{73}}}$

c) $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$ $2\sqrt{x^9 \times y^{11}}$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجــه بعـض الطلبة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- ناقِش الطلبة في حل الأسئلة 16,18, 20 على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إليهم حل المســائل (22–28) ضمن مجموعات.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مســائل الــدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكــن أيضا إضافة المســائل التي لــم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 3، قــد يخطئ بعض الطلبة في تبســيط العبارات الأســية ذات الاقواس، مثل: $\dfrac{(16p^4)^{\frac{3}{2}}}{(4p^2)^{\frac{1}{2}}}$، فلا يُطبِّقون قواعد الأســس تطبيقًا صحيحًا، ويطرحــون القوى على الرغم من عدم تســاوي الحــد الجبري في كل من البسط والمقام، أو يختصرون البسط والمقام من دون مراعاة تساوي القوى؛ لذا ذكِّرهم بقوانين الأسس، وشروط تطبيق كل منها.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $512^{\frac{1}{9}}$ 2
2) $125^{\frac{2}{3}}$ 25
3) $36^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{6}$
4) $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 729
5) $(-25)^{\frac{3}{2}}$ عدد غير حقيقي.
6) $(-8)^{\frac{7}{3}}$ -128

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7) $z^{-\frac{4}{2}} \times z$ $\frac{1}{z}$
8) $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$ $\sqrt[7]{x^3}$
9) $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$ $a^2\sqrt[3]{b^2}$
10) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$ $\frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$
11) $\frac{\sqrt[2]{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$ 1
12) $\frac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$ 1

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

13) $\left(\frac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$ $\frac{1}{4\sqrt{x^3y^2}}$
14) $\frac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$ $\frac{3\sqrt{y}\,z^2}{\sqrt[3]{x}}$
15) $\frac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$ $\frac{1}{a^2b^4}$
16) $\frac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$ $\frac{12q^{\frac{7}{3}}}{p^3}$
17) $\frac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ $x^{\frac{2}{3}}y$
18) $\frac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{8}{y}$

مهارات التفكير العليا

19) **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمةَ العبارةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$ -1

20) **تبريرٌ:** تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبحُ فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الملحق

تحدٍّ: أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

21) $\frac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^2 + r^3}$ انظر الملحق
22) $\frac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$ انظر الملحق
23) $\frac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$ انظر الملحق

24) **تبريرٌ:** أُقارِنُ بينَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. أُبرِّرُ إجابتي.

$5^{75} < 2^{175}$

28

5 الإثراء

- وجِّــه كل طالب إلى البحث في شــبكة الإنترنت عن ورقة عمل تتضمَّن تبســيط المقادير الأسية، ثم حلها وعرضها عليه؛ لتقديــم التغذية الراجعة له، ثم اطلب إليه حفظها في ملف أعمال الطالب.
- أكِّد للطلبة ضرورة توثيق مصدر ورقة العمل.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اســتكمال الخطــوة الثالثة والنتهاء منها، وبدء العمــل بخطوة عرض نتائج المشــروع، وإضافة كل العناصر المطلوبة فيه.
- في حال واجه الطلبة صعوبة في إعداد العرض، اطلب إليهم استعمال شــبكة الإنترنت، أو الاستعانة بمعلِّم الحاسوب.

إرشاد: ذكِّر الطلبة أنه لا يجوز الاختصار بين البسط والمقام في حالة وجود جمع أو طرح في أحدهما في الاسئلة 21, 22, 23 .

6 الختام

نشاط (مسابقة بين المجموعات):

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة.
- اكتب على اللوح تعبيرًا أســيًّا (يمكن الاستعانة بأحد الســؤالين الآتيين، أو ما تراه مناســبًا)، ثم اطلب إلى الطلبة كتابته في أبسط صورة.

1) $(8a^6)^{\frac{1}{3}} \times (\frac{27}{a^3})^{\frac{1}{3}}$

2) $\frac{9(3a^4)^{-2}}{\sqrt{(36a^4)}}$

- المجموعة الفائزة هي التي تكتب المقدار الأســي في أبسط صورة في أسرع وقت.

الدرس 4

فكرةُ الدرس

- حل معادلة أسية.
- حل نظام معادلات أسية.

التعلم القبلي:

- حل المعادلة الخطية.
- حل المعادلة التربيعية.
- حل نظام من معادلتين.
- تبسيط حدود ومقادير جبرية باستعمال قوانين الأسس.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح معادلة خطية (linear equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب المعادلة الخطية في صورة أس أساسه العدد 5 مثلًا، ثم اكتب الطرف الآخر؛ على أن يساوي العدد 5
- اطلب الى الطلبة اقتراح اسم المعادلة الناتجة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » هل يمكن التعبير عن نمو الزهر بمعادلة؟ نعم، $y = 2^x$
  - » هل تزداد قيمة y مع ازدياد قيمة x أم تنقص؟ تزداد.
  - » ما نوع المعادلة في المسألة؟ معادلة أسية.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

الدرس 4

حَلُّ المعادلةِ الأسِّيَّة
Solving Exponential Equation

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ، حَلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ الأُسِّيَّةُ.

مسألةُ اليومِ تستغرقُ الزنبقةُ المائيةُ 26 يومًا لتنموَ بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمْتُ أنَّ الزهرةَ تنمو يوميًّا بمقدارِ الضِّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمْ يومًا يَلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ (exponential equation) هيَ معادلةٌ تتضمَّنُ قوًى أُسسُها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حَلُّها كتابةَ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسَّيِ الطرفَيْنِ، وَفقَ القاعدةِ التي نصُّها: "إذا تساوَتْ قوَّتانِ لهُما الأساسُ نفسُهُ، فإنَّ أُسَّيْهِما متساويانِ."

مثال 1

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1) $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$ — $5^2 = 25$

$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$ — الأساسانِ متساويانِ

$3x + 2 = 2x - 2$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = -4$ — بحَلِّ المعادلةِ

2) $8^x = 2 \times (\frac{1}{2})^x$

$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$

$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$ — قوَّةُ القوى

$2^{3x} = 2^{-x+1}$ — ضربُ القوى

$3x = -x + 1$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = \frac{1}{4}$ — بحَلِّ المعادلةِ

أَبحثُ: قوَّةُ العددِ 2 أوْ 2^x مهمةٌ جدًّا في علمِ الحاسوبِ، لماذا؟

29

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

3 $49^{x+1} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

$(7^2)^{x+1} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$7^{2x+2} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$ قوَّةُ القوى

$7^{2x+2} = 7^{\frac{1}{2}-1}$ قسمةُ القوى

$7^{2x+2} = 7^{-\frac{1}{2}}$ الأساسانِ متساويانِ

$2x + 2 = -\frac{1}{2}$ بمساواةِ الأسسِ

$x = -\frac{5}{4}$ بحَلِّ المعادلةِ

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

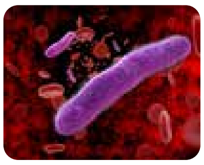
a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$ $-\frac{15}{8}$ b) $9^x = 3 \times (\frac{1}{3})^x$ $\frac{1}{3}$ c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$ $-\frac{7}{16}$

مفهومٌ أساسيٌّ

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسِّيِّ هيَ: $y = a(b)^x$، حيثُ a وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$

مثال 2: من الحياة

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها في مختبرِ العلومِ باستعمالِ 5000 خليةٍ بكتيريةٍ. وبعدَ مرورِ 3 ساعاتٍ لاحظَتْ أنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ قدْ أصبحَ 11000 خليةً، وأنَّ عددَها كانَ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ ساعةٍ. أَكتبُ اقترانًا أُسِّيًّا يُمثِّلُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ، ثمَّ أستعملُهُ لإيجادِ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً.



قدْ يحتوي الغِرامُ الواحدُ منَ التربةِ على نحوِ 10^{10} خلايا بكتيريةٍ مختلفةِ الأنواعِ.

أولًا: أَجِدُ الاقترانَ الأُسِّيَّ الذي يُمثِّلُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ. في الصيغةِ العامةِ للاقترانِ الأُسِّيِّ، يوجدُ مُتغيِّرانِ x, y، وهما يُمثِّلانِ الزمنَ وعددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةِ دعاءَ. أَفترضُ أنَّ الزمنَ هوَ x، وأنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ هوَ y.

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها عندَ الزمنِ $x = 0$، مُستعمِلةً 5000 خليةٍ بكتيريةٍ؛ أيْ:

3 التدريس

مثال 1

- ابدأ بشـرح مفهوم المعادلة الأسية (exponential equation)، ثم اسأل الطلبة:
  - » مـاذا يُقصَد بحـل المعادلة الأسـية؟ إيجاد قيمة المتغير الذي يجعل المعادلة عبارة صحيحة.
  - » مَنِ اقترح طريقة لحل المعادلة الأسية؟
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم قدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِـش الطلبة في حـل المثال، مُؤكِّـدًا لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل بالتعويض في طرفي المعادلة.

إرشاد: في المثال 1، وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحة الحل.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المسـتوى دون المتوسط صعوبة في توحيد الأساس؛ فذكِّرهم بنواتج القوة (الأسس) لأعداد، مثل: 2, 3, 4, 5, 10، وشـجِّعهم علـى كتابتها وحفظها؛ لكي تساعدهم في أثناء الحل.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 1، يخطـئ بعض الطلبة في تطبيق قوانين الأسـس عند محاولة إيجاد أساس مشترك في طرفي المعادلة. فمثلًا:

قـد يكتبـون $3^{4y} = 9^{y+1}$ في صـورة $3^{4y} = 3^{2y+1}$

أو يكتبـون $2^x = 16^{2x}$ فـي صـورة $2^x = 2^{4x}$؛ لذا اطلب إليهم استعمال الأقواس في الخطوات الأولى من الحل، وتجزئة الحل إلى خطوات، أو اسـتعمال أي طريقة يجدونها مناسبة.

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسِّيِّ	$y = a(b)^x$
بتعويضِ قيمةِ $x = 0$، وقيمةِ $y = 5000$	$5000 = a(b)^0$
$b^0 = 1$	$a = 5000$
بتعويضِ قيمةِ a	$y = 5000(b)^x$

عندَ الزمنِ $x = 3$ أصبحَ العددُ 11000 خليةً بكتيريةً؛ أيْ:

بالتعويضِ	$11000 = 5000(b)^3$
بقسمةِ كلا الطرفيْنِ على 5000	$\frac{11000}{5000} = b^3$
الجذرُ التكعيبيُّ للطرفيْنِ	$b = \sqrt[3]{\frac{11000}{5000}}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$b \approx 1.3$

إذنْ، يُمكِنُني التعبيرُ عنْ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ x منَ الساعاتِ بالاقترانِ الأُسِّيِّ:

$$y = 5000(1.3)^x$$

ثانيًا: أَجِدُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً:

أُعوِّضُ $x = 12$ في الاقترانِ	$y = 5000(1.3)^{12}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$y \approx 116490$

أَتعلَّمُ

لإيجادِ قيمةِ $(1.3)^{12}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أضغطُ على الأزرارِ:

1 . 3
^ 1 2 =

أتحقق من فهمي

بلغَ عددُ الزائرينَ لموقعٍ تعلُّميٍّ على شبكةِ الإنترنتْ 579 زائرًا في اليومِ الأولِ منْ إنشاءِ الموقعِ، وفي اليومِ التالي زادَ العددُ ليصلَ إلى 1386 زائرًا. إذا كانَ عددُ الزُّوّارِ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ يومٍ، فأكتبُ المعادلةَ الأُسِّيَّةَ التي تُمثِّلُ عددَ زائري الموقعِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الأيامِ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ عددِهِمْ بعدَ 10 أيامٍ.

$y = 579(2.4)^{x-1}$

بعد 10 أيام يصبح العدد 1494310 زائرًا.

نما عددُ مُستخدِمي المواقعِ التعليميةِ بما نسبتُهُ 900% منذُ عامِ 2000م.

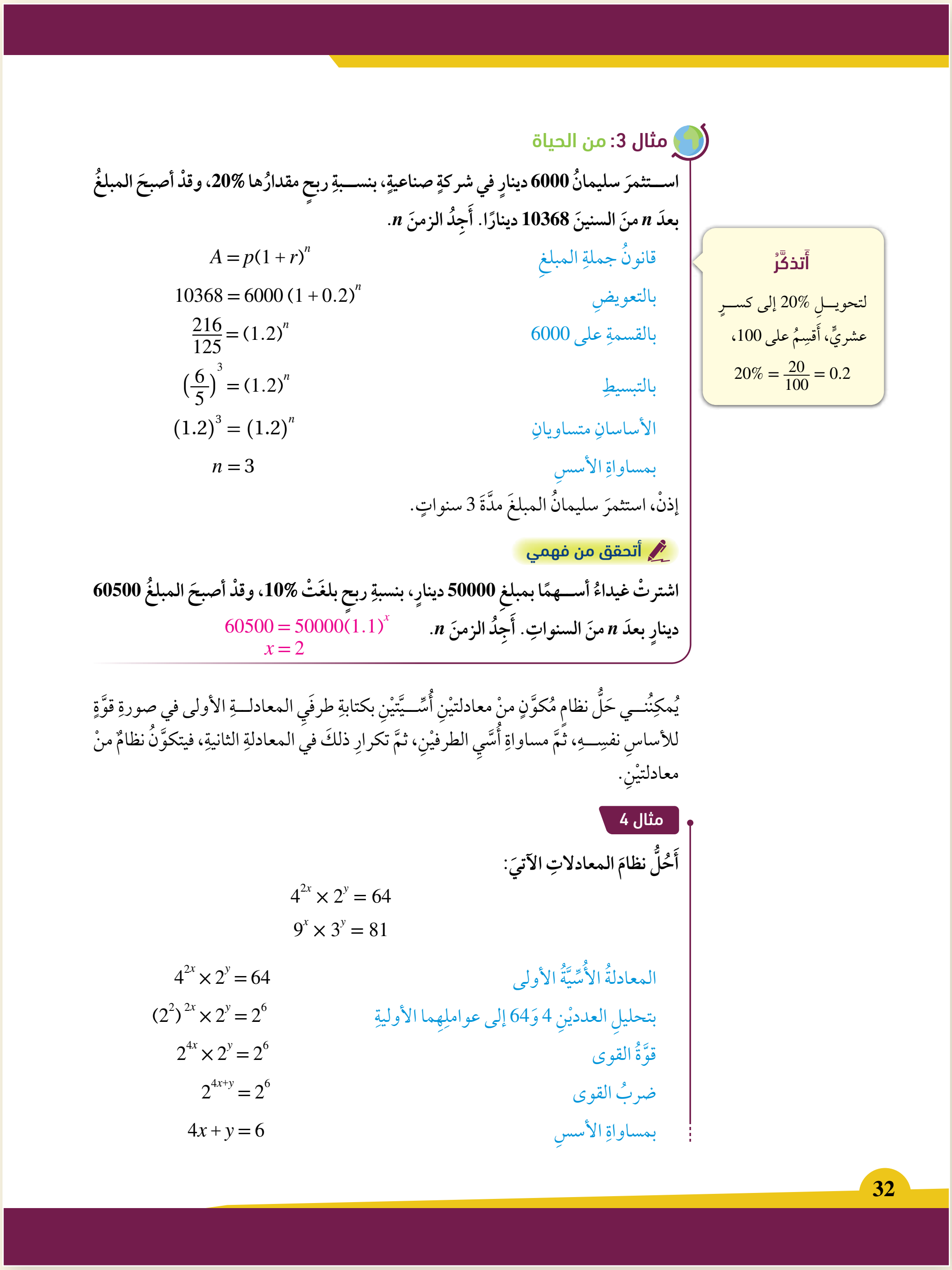
يُستعمَلُ القانونُ $A = p(1+r)^n$ لحسابِ جملةِ المبلغِ (المبلغُ بعدَ استثمارِهِ) في حالةِ الربحِ المُركَّبِ، حيثُ يُمثِّلُ A جملةَ المبلغِ، وَ p المبلغَ الحاليَّ (المبلغُ المرادُ استثمارُهُ)، وَ r نسبةَ الربحِ، وَ n الزمنَ بالسنواتِ.

مثال 2: من الحياة

- اكتب على اللوح الصيغة العامة للاقتران الأسي (exponential function)، ثم بيِّن للطلبة عناصرها.
- اطلب إلى الطلبة تحديد المعطيات والمطلوب في المثال؛ لفهم المسألة قبل حلها.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.

إرشادات:

- في المثال 2 ، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في تكوين المعادلة؛ لذا ساعدهم على تحديد القيم المعطاة في المسألة، وما تُمثِّله من متغيرات في الصيغة العامة للاقتران الأسي.
- وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة؛ لمساعدتهم في أثناء الحل، ودرِّبهم على استعمالها بصورة صحيحة.



مثال 3: من الحياة

اســـتثمرَ سليمانُ 6000 دينارٍ في شركةٍ صناعيةٍ، بنســـبةِ ربحٍ مقدارُها 20%، وقدْ أصبحَ المبلغُ بعدَ n منَ السنينَ 10368 دينارًا. أَجِدُ الزمنَ n.

قانونُ جملةِ المبلغِ	$A = p(1+r)^n$
بالتعويضِ	$10368 = 6000\,(1+0.2)^n$
بالقسمةِ على 6000	$\frac{216}{125} = (1.2)^n$
بالتبسيطِ	$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = (1.2)^n$
الأساسانِ متساويانِ	$(1.2)^3 = (1.2)^n$
بمساواةِ الأسسِ	$n = 3$

إذنْ، استثمرَ سليمانُ المبلغَ مدَّةَ 3 سنواتٍ.

أَتذكَّرُ

لتحويـــلِ 20% إلى كســـرٍ عشريٍّ، أَقسِمُ على 100،

$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$

أتحقق من فهمي

اشترتْ غيداءُ أســـهمًا بمبلغِ 50000 دينارٍ، بنسبةِ ربحٍ بلغَتْ 10%، وقدْ أصبحَ المبلغُ 60500 دينارٍ بعدَ n منَ السنواتِ. أَجِدُ الزمنَ n.

$60500 = 50000(1.1)^x$

$x = 2$

يُمكِنُنـــي حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ أُسِّـــيَّتيْنِ بكتابةِ طرفَيِ المعادلـــةِ الأولى في صورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِـــهِ، ثمَّ مساواةِ أُسَّيِ الطرفيْنِ، ثمَّ تكرارِ ذلكَ في المعادلةِ الثانيةِ، فيتكوَّنُ نظامٌ منْ معادلتيْنِ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$
$$9^x \times 3^y = 81$$

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ الأولى	$4^{2x} \times 2^y = 64$
بتحليلِ العدديْنِ 4 وَ64 إلى عواملِهِما الأوليةِ	$(2^2)^{2x} \times 2^y = 2^6$
قوَّةُ القوى	$2^{4x} \times 2^y = 2^6$
ضربُ القوى	$2^{4x+y} = 2^6$
بمساواةِ الأسسِ	$4x + y = 6$

32

مثال 3: من الحياة

- وضِّـــح للطلبة مفهـــوم جملة المبلغ فـــي حالة الربح المُركَّب، مُبيِّنًا لهم أنه من التطبيقات المهمة للمعادلة الأسية.
- ناقِش الطلبة في خطـــوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أكِّد لهم ضـــرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلة.

مثال 4

- وضِّح للطلبة مفهوم نظام المعادلات الأسية، وكيفية حله بطرح الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني لك اسم (نظام من معادلتين أسيتين)؟
  - » كم متغيرًا فيه؟
  - » ما معنى حل نظام المعادلات الأسية؟
  - » اقترح طريقة لحل النظام.
  - » مَنْ لديه طريقة أخرى؟
- استمع لإجابات الطلبة، وقدِّم لهم التغذية الراجعة، ثم وضِّح مفهوم نظام المعادلتين الأسيتين، وكيفية حله.
- ناقِش الطلبة في خطـــوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أكِّد لهم ضـــرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلتين.

إرشاد:

- في المثـــال 4، قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل نظام المعادلات باســـتعمال طريقة الحذف (elimination)، أو التعويض (substitute)؛ لذا ذكِّرهم بهاتين الطريقتين بذكر مثال بسيط.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

مهارات التفكير العليا

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم وجِّههم إلى حل المسائل.
- ناقِش أفراد كل مجموعة في إجاباتها.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة تبرير حلهم في كل مسألة (يمكن توجيه أفراد كل مجموعة إلى تقييم حل أفراد مجموعة أخرى).
- استمع لإجابات أفراد المجموعات، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

بتطبيقِ الخطواتِ نفسِها على المعادلةِ الثانيةِ تنتجُ المعادلةُ الخطِّيّةُ $2x+y=4$

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطِّيِّ الناتجَ بالحذفِ:

$$\begin{array}{rr} & 4x+y=6 \\ (-) & 2x+y=4 \\ \hline & 2x=2 \end{array}$$

بطرحِ المعادلتيْن

$x=1$ بالقسمةِ على 2

$4(1)+y=6$ بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ الثانيةِ

$4+y=6$

$y=2$ بحَلِّ المعادلةِ

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x=1\ , y=2$

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطِّيِّ بالحذفِ، أو التعويضِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: $\left(\frac{13}{5}, -\frac{1}{10}\right)$

$$\frac{4^x}{256^y}=64$$

$$3^{2x}\times 9^y=243$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1) $64=(32)^{3-x}$ $\quad \frac{9}{5}$

2) $81^{5x+1}=27^{4x-3}$ $\quad -\frac{13}{8}$

3) $128^{x-5}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{71}{14}$

4) $64^{7x+1}=\frac{2}{16^{4x-3}}$ $\quad \frac{7}{58}$

5) $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1}=(11)^{x+7}$ $\quad 3.75$

6) $\left(\sqrt{7}\right)^{4x+5}=\left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$ $\quad \frac{7}{11}$

7) $9^{x^2}\times 27^{x^2}=243$ $\quad x=\pm 1$

8) $5^{2x}\times 25^{x}=125$ $\quad \frac{3}{4}$

9) $2^{x^2}\times 2^{6x}=\frac{1}{32}$ $\quad -1 , -5$

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

10) $5^y=25^{x-3}$, $125^y=25^{x-1}$ $\quad x=4, y=2$

11) $3^y=3^{2x+y}$, $27^y=27^{x+3}$ $\quad x=0, y=3$

12) $5^{2x}\times 25^y=125$, $\frac{8^x}{2^y}=16$ $\quad x=\frac{11}{8}, y=\frac{1}{8}$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$ ، $\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$ $x = -\frac{16}{3}, y = \frac{7}{26}$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$ ، $8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$ $(0, -1), (\frac{7}{9}, -\frac{103}{54})$

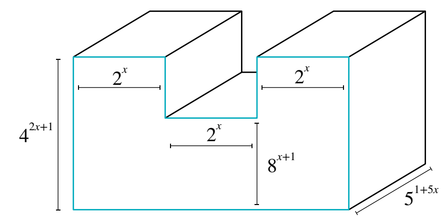
15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$ ، $2^{m^2} \times 2^n = 64$ $(m, n) = (-3,3), (3, -3)$

16 **ثقافةٌ ماليةٌ:** يتضاعفُ مبلغٌ يستثمرُهُ عليٌّ 3 أضعافٍ كلَّ شهرٍ. إذا أصبحَ المبلغُ بعدَ 4 شهور 1701 دينارًا، فكمْ دينارًا كانَ رأسُ المالِ؟ انظر الملحق

17 **سيارةٌ:** اشترى سعيدٌ سيارةً بمبلغِ 15000 دينارٍ. إذا قَلَّتْ قيمةُ السيارةِ بنسبةِ 20% سنويًّا، فبعدَ كمْ سنةٍ تصبحُ قيمتُها 6144 دينارًا؟ بعد 4 سنوات

18 **بكتيريا:** يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الخلايا البكتيريةِ 2187 خليةً؟ انظر الملحق

19 **هندسةٌ:** أكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ الآتي. انظر الملحق



مهارات التفكير العليا 20 - 23 انظر الملحق

20 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $2 + 2^x = 1$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

21 **تبريرٌ:** أَحُلُّ المعادلةَ الآتيةَ، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

$$x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$$

22 **تحدٍّ:** ما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y في المعادلةِ الآتيةِ:

$$\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$$

23 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيَ:

$$2^x + 3^y = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

5 الإثراء

- حُلَّ المعادلة الأسية: $2^{2x} - 2^{x+4} + 64 = 0$
- حُلَّ نظام المعادلات الآتي:

$$\frac{16^{4x-1}}{64^{y-2}} = 4^{y+x}$$

$$\frac{(625^{-\frac{x}{2}})^{4-y}}{64^{y-2}} = 5^{2x+4y}$$

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بقرب موعد عرض نتائج المشروع، ووجوب الانتهاء من تجهيزه، والتحقُّق من توافر العناصر المطلوبة جميعها؛ استعدادًا لعرضه.
- ذكِّر الطلبة بأداة تقييم المشروع الواردة في بداية الوحدة.

6 الختام

مسابقة (التحديات الثلاثة):

- أحضِر ثلاثة صناديق، ثم اكتب على الأول عبارة: (التحدي 1)، واكتب على الثاني عبارة: (التحدي 2)، واكتب على الثالث عبارة: (التحدي 3).
- ضع مجموعة من الأوراق في كل صندوق، كُتِب في كل منها سؤال مناسب (استعن بالجدول الآتي).

» حل المعادلة: ....

التحدي 1	**a)** $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ **b)** $x^{-\frac{1}{2}} = 25x^{\frac{3}{2}}$ **c)** $x^{2x-1} = 3^{x+1}$ **d)** $2^{2y} \times 2^{2-y} = 2^{-y}$
التحدي 2	**a)** $25^{2x} = 5^{1-x}$ **b)** $81^{-\frac{y}{2}} = 27^{2y+1}$ **c)** $(\frac{1}{4096})^{-\frac{y}{z}} = 16^{2z-1}$
التحدي 3	**a)** $2^{\frac{1}{2-x}} \times 3^{2x} = 108$ **b)** $1875 = 3^{2x-1} \times 5^{3+x}$ **c)** $2^{3x+1} \times 5^{5+2x} = 800$

- قسِّم مجموعة من طلبة الصف إلى فريقين (كل فريق يتألَّف من 5 طلبة).
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة ترشيح متسابق من فريقهم لسحب ورقة من صندوق (التحدي 1)، ثم حل السؤال المكتوب في الورقة خلال دقيقتين.
- يحصل الفريق الذي إجابته صحيحة على نقطة.
- كرِّر الخطوة السابقة للصندوق الثاني، ثم الثالث مع متابعة تسجيل النقاط.
- الفريق الفائز هو الذي يجمع نقاطًا أكثرَ.

الوحدةُ 1

التقويم الختامي:

- وزِّع الطلبــة إلى مجموعات غير متجانســة، ثم وزِّع على كل منها الأسئلة (18–1).
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة مناقشة إجابات الأسئلة الخاصة بهم.
- تجوَّل بين أفــراد المجموعات مُرشِــدًا ومُســاعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش أفراد المجموعات في حل بعض المسائل على اللوح.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

عرِّف الطلبــة بالاختبــارات الدولية، مُبيِّنًا لهــم أهميتها مســتعينًا بالمعلومة أدناه، ثم وجِّههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبــارات الدولية) بصورة فردية، ثم ناقِشهم في إجاباتها على اللوح.

يتقدم طلبة الصف العاشــر فــي الأردن لاختبار البرنامج الدولــي لتقييم أداء الطلــب(PISA) في مجالات القراءة والرياضيــات والعلوم، وفيمــا يخــص الرياضيات فإن المعرفــة الرياضية وفق هــذا البرنامج يُعبّــر عنها بمدى قدرة الفــرد على صياغة، وتوظيف، وتفســير الرياضيات في أوضــاع مختلفــة، إذ تتضمــن القدرة علــى التفكير الرياضــي واســتخدام المفاهيم والإجــراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر والتنبؤ بها. و تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراســمي السياسات التربوية في الدول المشــاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتعينهــم في تقييم النجاحــات أو الإخفاقات، وهذه الدراســات والبرامج يشــارك الأردن فــي دوراتها بانتظام منذ أوائل تسعينات القرن العشرين. عليك عزيزي المعلم تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل مثل هذه الأسئلة والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج القيم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

1) $y = 4x$, $y = 5 - x^2$ — $(1, 4), (-5, -20)$

2) $y - x = 15$, $x^2 + y^2 = 64$ — لا يوجد حل للنظام.

3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = -x^2 + 5$ — $(2, 1), (0, 5)$

4) $y = -x^2 - x + 12$, $y = x^2 + 7x + 12$ — $(-4, 0), (0, 12)$

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي، فأَجِدُ:

$$3x - 2y = 7$$
$$x^2 - y^2 = c$$

5) حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$ — $(3, 1), (5.4, 4.6)$

6) جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي لا تجعلُ للنظامِ أيَّ حَلٍّ.
$c \geq 10$

7) أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $3 - 7y < 6x^2$ بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي: انظر الملحق

$$y = 3 - 7x$$
$$y = 6x^2$$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

8) $\dfrac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$ — 4

9) $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ — $\dfrac{16}{9}$

10) $\dfrac{(16p^4q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$ — $\dfrac{\sqrt[2]{q^5}}{8p^5}$

11) $\dfrac{(27a^{\frac{3}{2}}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^4b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$ — $3\sqrt{a^3}b$

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

12) $3^a x^b = \dfrac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ — $a = 3, b = \dfrac{11}{6}$

13) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2} = x^a$ — $a = -0.5$

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

14) $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$ — $t = \frac{2}{3}$

15) $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{c - \frac{5}{2}}$ — $c = -\frac{1}{2}, 3$

16) $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$ — $x = 2$

17) $500 = \dfrac{2^{\frac{1}{2} - x}}{5^{2x}}$ — $x = -1.5$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

18) $36^{x+4} = 6^y$, $36^y = 36^{x+6}$ — $(-2, 4)$

19) $5^{2x+4} = 5^{y-3}$, $7^{y-x} = 49$ — $(-5, -3)$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

20) أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ تُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ: c

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$3x + y = 6$$

a) $(1, 3)$ b) $(0, 2)$
c) $(2, 0)$ d) $(-2, -2)$

21) العبارةُ الجبريةُ التي يجبُ وضعُها فــي المربَّعِ الفارغِ للمعادلةِ $\dfrac{8x^2y^3}{\square} = \left(\dfrac{2y}{x}\right)^2$ هيَ: a

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$
c) $2xy$ d) x^2y^2

22) أَجِدُ جميعَ قيمِ p التــي تجعلُ منحنى المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 2x + p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةِ $y = x^2 + 3x - 1$. — $p \leq -2$

35

كتاب التمارين

الدرس 1
حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1. $y = 7x + 15$, $y = 3x^2 + 5x - 2$ — $(-2.07, 0.5)$
2. $y - x = 1$, $y = 2x^2 - 11x + 16$ — $(1.77, 2.775), (4.22, 5.22)$
3. $y - x = 10$, $x^2 + y^2 = 50$ — $(-5, 5)$
4. $x + y = 20$, $x^2 - y^2 = 16$ — $(10.4, 9.6)$
5. $y - x = 0$, $y = x^2 + 3x + 2$ — لا يوجد حل للنظام.
6. $y = 2x - 5$, $y = x^2 - 2x$ — لا يوجد حل للنظام.
7. $y = x - 1$, $y = x^2 - 3x + 2$ — $(1, 0), (3, 2)$
8. $y - 2x = 1$, $y = 5x^2 + 4y - 1$ — $(-0.86, -0.73), (0.46, 1.93)$
9. $y - x + 1 = 0$, $y = x^2 + 3x$ — لا يوجد حل للنظام.
10. $y = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ — $(0, 2)$
11. $y - x = 1$, $y = x^2 + 6x + 8$ — لا يوجد حل للنظام.
12. $y = 2 - 3x$, $y = x^2 - 4x + 3$ — لا يوجد حل للنظام.

13. **حدائقُ**: حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها 30 m، ومحيطُها 84 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = 900$
$2x + 2y = 84$
$\Rightarrow (x, y) = (24, 18)$

14. **سَجّادٌ**: اشترَتْ ليلي سَجّادةً مستطيلةَ الشكلِ، طولُ قُطْرِها $\frac{1}{2}\sqrt{34}$ m، ومحيطُها 8 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $2x + 2y = 8$, $(x, y) = (2.5, 1.5)$

15. **ادِّخـارٌ**: إذا كانَ الفرقُ بينَ المبلغِ الذي ادَّخرَتْهُ رزانُ والمبلغُ الذي ادَّخرَتْهُ أختُها هديلُ هوَ دينارَيْنِ، وكانَ مجموعُ مربَّعَي ما معَهُما 74 دينارًا، فكمْ دينارًا ادَّخرَتْ كلٌّ منْهُما؟
$x - y = 2$, $x^2 + y^2 = 74$, $(x, y) = (7, 5)$

16. **نقـودٌ**: قالَ مازنٌ إنَّ مجموعَ مالديَّ ولدى أخي منْ نقودٍ هوَ 7 دنانيرَ، وإنَّ الفرقَ بينَ مربَّعَيْ ما معَنا هوَ 7 دنانيرَ. كمْ دينارًا معَ مازنٍ وأخيهِ؟ $(4, 3)$

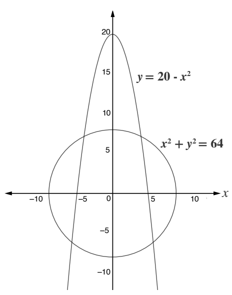
17. إذا كانَ المستقيمُ $y = 3x - 4$ يقطعُ المنحنى $y = x^2 - px + 4$ في نقطتَيْنِ، فما قيمةُ P؟ انظر ملحق الإجابات

الدرس 2
حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتَيْنِ تربيعيتَيْنِ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1. $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 - 3x$ — $(3, 0)$
2. $y - 3x^2 = x + 2$, $y = -6x^2 + 7x$ — لا يوجد حل
3. $y = 0.5x^2 + 0.5x + 1$, $y = -x^2 + 2x + 4$ — $(2, 4), (-1, 1)$
4. $y = 2x^2 + 8x + 4$, $y = x^2 + 2x + 4$ — $(0, 4), (-6, 28)$
5. $y - x^2 = 0$, $y + x^2 = 0$ — $(0, 0)$
6. $y = x^2 + x - 1$, $y = 5 - x^2$ — $(1.5, 2.75), (-2, 1)$
7. $y = x^2 + x + 2$, $y + x^2 + 2 = 0$ — لا يوجد حل
8. $y = x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2), (-2, 2)$
9. $y = -x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2)$
10. $y^2 = -x^2 + 4$, $y = 0.5x^2 - 2$ — $(0, -2), (-2, 0), (2, 0)$
11. $4y + 9x^2 = 25$, $y - x^2 = 3x - 4$ — $(1.3, 1.57), (0.46, -2.4)$
12. $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = (x - 3)^2$ — $(3.91, 0.83), (1.03, 3.86)$

13. **كرةُ طائرةٍ**: في أثناءِ لعبِ سـامية وهندَ كرةَ الطائرةِ، رمَتْ ساميةُ الكرةَ على شكلِ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 3$، ثمَّ رمَتْ هندُ الكرةَ على شكلِ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 2x$. أَجِدُ إحداثياتِ نقطةِ التقاءِ الكرتَيْنِ. $(1.5, 0.75)$



14. **أبراجٌ**: أرادَ مركزُ حراسةٍ إيجادَ نقاطِ التقاطعِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ لتركيبِ أبراجِ مراقبةٍ عندها. أَجِدُ إحداثياتِ هذِهِ النقاطِ.
$(3.58, 7.15), (-3.58, 7.15)$,
$(5.11, -6,15), (-5.11, -6.15)$

إرشاد: لحل المسائل 11 ، 12 ، 13 ، 14، استعمل القانون العام والآلة الحاسبة.

الدرس 3
تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $16^{\frac{1}{4}}$ — 2
2. $36^{\frac{3}{2}}$ — 216
3. $32^{-\frac{3}{5}}$ — $\frac{1}{8}$
4. $(81)^{\frac{1}{4}}$ — 3
5. $(-27)^{\frac{2}{3}}$ — 9
6. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ — 16
7. $1^{-\frac{4}{9}}$ — 1
8. $25^{-\frac{3}{2}}$ — $\frac{1}{125}$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

9. $y^{\frac{4}{3}} \times y^{-\frac{5}{2}}$ — $\frac{1}{y^{\frac{7}{6}}}$
10. $z^{\frac{7}{2}} \times z^{-\frac{3}{4}}$ — $z^{\frac{11}{4}}$
11. $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{5}{2}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$
12. $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{7}{3}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}$
13. $\frac{x^{\frac{2}{7}}}{x^{-\frac{3}{5}}}$ — $x^{\frac{31}{35}}$
14. $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}}$ — x
15. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{7}}$ — $\frac{y^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{3}{7}}}$
16. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$ — $\frac{1}{x^{\frac{7}{15}}}$

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

17. $\frac{8x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{5}{2}}y}$ — $\frac{4}{x^6y^{\frac{2}{3}}}$
18. $\frac{10xy^{-\frac{3}{4}}}{5x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}$ — $\frac{2x^{\frac{8}{3}}}{y^{\frac{25}{12}}}$
19. $\frac{\left(4y^{-\frac{7}{3}}\right) \times \left(24xy^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(2x^{\frac{5}{3}}y\right)\left(y^{-\frac{5}{2}}\right)}$ — $\frac{48y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$
20. $\frac{\left(125y^{-\frac{2}{5}}\right) \times \left(10x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(5xy^{-\frac{5}{2}}\right)\left(y^{-\frac{7}{5}}\right)}$ — $\frac{250y^{\frac{37}{10}}}{x^{\frac{5}{7}}}$
21. $\sqrt[3]{2x^{27}y^9}$ — $\sqrt[3]{2}x^9y^3$
22. $\sqrt{9x^8y^4}$ — $3x^4y^2$

23. **بكتيريا**: تتضاعفُ عيِّنةُ بكتيريا مخبريةٍ 4 مرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا كانَ في العيِّنةِ 3500 خليةٍ بكتيريةٍ اليومَ، فكمْ يصبحُ عددُها بعدَ مرورِ 7 أسابيعَ؟ 57344000

24. **تجـارةٌ**: يتضاعفُ ثمنُ قطعةِ أرضٍ سـنويًّا بمقدارِ الضعفِ. كمْ سـيصبحُ ثمنُها بعدَ 3 سـنواتٍ، علمًا بـأنَّ ثمنَها اليومَ 5000 دينارٍ؟ 40000

الدرس 4
حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1. $64 = (16)^{5x+7}$ — $-\frac{11}{10}$
2. $49 = (343)^{7x+1}$ — $-\frac{1}{21}$
3. $16^{2x+3} = 4^{x+1}$ — $-\frac{5}{3}$
4. $36^{3x-1} = 6^{x-2}$ — 0
5. $125^x = 5 \times \left(\frac{1}{25}\right)^x$ — $\frac{1}{5}$
6. $81^x = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^x$ — $\frac{1}{6}$
7. $128^{5x-4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ — $\frac{57}{70}$
8. $2^x = \frac{16^{2x}}{32^{x+1}}$ — $-\frac{5}{2}$
9. $\frac{3^{x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{2-x}}{3^{1-x}}$ — $\frac{5}{8}$
10. $\frac{25^{\frac{x}{2}}}{125^{-x}} = \frac{5^{3x+1}}{25^x}$ — $\frac{1}{3}$
11. $\frac{8^{x-\frac{1}{3}}}{64^{\frac{2x}{3}}} = \frac{4^{\frac{x}{2}}}{32^{-x}}$ — $-\frac{1}{5}$
12. $\frac{100^{2-\frac{x}{2}}}{1000^{\frac{x}{3}}} = \frac{1000^{\frac{x}{3}-1}}{100^{\frac{5x}{2}}}$ — $-\frac{7}{2}$

13. **كهرباءُ**: تقاسُ شِـدَّةُ التيـارِ الكهربائيِّ بوحدةِ الأمبيـرِ A. إذا كانَتِ العلاقةُ بينَ شِـدَّةِ التيارِ I والزمـنِ بالثواني t هيَ: $I = 2^{-t}$، فبعدَ كمْ ثانيةً تصبحُ شِدَّةُ التيارِ $0.125\ A$؟ $t = 3$

14. **لعبةُ شطرنجَ**: حصلَ مُخترِعُ لعبةِ الشطرنجِ على مكافأةٍ منَ المَلكِ، هيَ حبوبٌ منَ القمحِ: حبَّةُ قمحٍ عنِ المربَّعِ الأولِ في لوحةِ الشطرنجِ، وحبَّتانِ عنِ المربَّعِ الثاني، وأربعُ حبّاتٍ عنِ المربَّعِ الثالثِ، وثماني حبّاتٍ عنِ المربَّعِ الرابعِ، وهكذا. إذا كانَ عددُ حبّاتِ القمحِ التي حصلَ عليْها في المربَّعِ x هوَ 4096، فما قيمةُ x؟ المربع 12

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةِ:

15. $125^x \times 25^{-y} = 625$, $4^x \times 2^y = 8$ — $(1.428571, 0.142857)$
16. $16^x \times 2^{3y} = 2048$, $49^x \times 7^y = 16807$ — لا يوجد للنظام حل.
17. $25^x \times 5^y = 125$, $4^{2x} \times 2^{2y} = 64$ — عدد لانهائي من الحلول.
18. $27^x \times 9^{2y} = 81$, $2^{5x} \times 32^y = 128$ — $(1.6, -0.2)$

إجابات صفحة 16:

16) افترض أن عمر شيماء هو x، وأن عمر ريان هو y:

$$x = y + 4$$
$$x^2 + y^2 = 346$$
$$\Rightarrow (15, 11)$$

أي إن عمر شيماء 15 عامًا، وعمر ريان 11 عامًا.

17) افترض أن الطول هو x، وأن العرض هو y:

$$x = 2y$$
$$x^2 + y^2 = 1.25$$
$$\Rightarrow (1, 0.5)$$

التكلفة = طول المحيط × سعر المتر الواحد= 6.75 دنانير.

18) افترض أن طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو x.

إذن: يكون طول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو: $x + 1$

$$(x + 1)^2 + x^2 = 41$$
$$x^2 + x - 20 = 0$$
$$x = 4$$

أي إن طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو 4 أمتار، وطول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو 5 أمتار.

19) بحل المعادلتين، يتبيَّن عدم وجود حل للنظام؛ ما يعني عدم وصول المياه إلى وحدة الإنارة.

20) عوِّض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$
$$3x + p = 2x^2 + 3x - 5$$
$$2x^2 - (5 + p) = 0$$

المميز يساوي صفرًا؛ لأنه يوجد حل واحد فقط.

إذن:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (0)^2 + 4(2)(5+p) = 0$$
$$40 + 8p = 0$$
$$p = -5$$

21) أولًا: حل نظام المعادلات بتعويض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

الحل: $(0.85, -1.77), (3.15, 9.77)$.

ثانيًا: اختر ثلاث نقاط عشوائيًّا، بحيث تكون النقاط مُوزَّعة كالآتي:
نقطة بين حلي النظام مثل: $(2, 2)$، ونقطة على يسار الحل الأصغر مثل: $(0, 4)$، ونقطة على يمين الحل الأكبر مثل: $(4, 12)$.

ثالثًا: عوِّض كل نقطة من النقاط الثلاث في المتباينة؛ لتحصل على عبارة صحيحة، فيكون حل النظام هو:

$x < 0.85$ ، أو $x > 3.15$

22)

- مثِّل للطلبة المعادلة $y = x^2$ بيانيًّا، وليكن الرأس: $(0, 0)$.
- اقبل كل المعادلات الخطية، ومثِّلها بيانيًّا، مُحدِّدًا الحالة التي تُحقِّقها، ثم اطلب إلى الطالب حلها جبريًّا.

إرشاد: استعمل برمجية جيوجبرا في حل هذا السؤال.

إجابات صفحة 21:

(أتحقق من فهمي 4):

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

$x^2 + y^2 = 16$	
$-x^2 + 3y = -12$	بإعادة الترتيب
$y^2 + 3y = 4$	بجمع المعادلتين
$y^2 + 3y - 4 = 0$	بإعادة الترتيب
$(y + 4)(y - 1) = 0$	بالتحليل
$y = -4, y = 1$	خاصية حاصل الضرب الصفري
$x^2 -(-4)^2 = 16$	بتعويض $y = 4$ في المعادلة الأولى
$x^2 = 0$	بالتبسيط
$x = 0$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين
$x^2 + (1)^2 = 16$	بتعويض $y = 1$ في المعادلة الأولى
$x^2 = 15$	بالتبسيط
$x = \pm\sqrt{15}$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين
$(0, -4), (\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1)$	الحلول الثلاثة، هي:

للتحقُّق من صحة الحل، وجِّه الطلبة إلى تعويض كل حل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم اعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.

8) بجمع المعادلتين

$$\begin{array}{rl} & x^2 + y^2 = 16 \\ + & -x^2 + y = -5 \\ \hline \end{array}$$

$$y^2 + y = 11$$
$$y^2 + y - 11 = 0$$
$$y \approx 2.85, y \approx -3.85$$
$$x^2 = 2.85 + 5 = 7.85$$
$$x \approx 2.80, x \approx -2.80$$
$$x^2 = -3.85 + 5 = 1.15$$
$$x \approx 1.07, x \approx -1.07$$
$$(2.80, 2.85), (-2.80, 2.85), (1.07, -3.85), (-1.07, -3.85)$$

10) بطرح المعادلة (1) من (2)

$$-\begin{array}{l} x^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow (1) \\ x^2 + y^2 = 9 \rightarrow (2) \end{array}$$

$y^2 - (y-2)^2 = 5$

$y^2 - y^2 + 4y - 4 = 5$

$4y = 9$

$y = \frac{9}{4} = 2.25$

$x^2 + (\frac{9}{4})^2 = 9$

$x = \pm\frac{\sqrt{63}}{4}$

$x \approx \pm 1.98$

$(1.98, 2.25), (-1.98, 2.25)$

إجابات صفحة 22:

13)

$x^2 + 6x = -x^2 + 24x$

$\Rightarrow 2x^2 - 18x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x = 0$

$\Rightarrow x(x-9) = 0$ تهمل $x = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 9$

$\Rightarrow (9.135)$

14) افترض أن طول القاعدة هو $2x$، وأن الارتفاع هو y:

$x^2 + y^2 = 2500 \Rightarrow y = \sqrt{2500 - x^2}$

$\frac{1}{2}(2x)(y) = 1200 \Rightarrow xy = 1200 \Rightarrow x\sqrt{2500 - x^2} = 1200$

$\Rightarrow x^2(2500 - x^2) = 1440000$

$\Rightarrow x^4 - 2500x^2 + 1440000 = 0$

$u = x^2 \Rightarrow u^2 - 2500u + 1440000 = 0$

$\mathrm{u} = \frac{2500 \pm \sqrt{490000}}{2} \Rightarrow u = 1600, u = 900$

$x^2 = 1600 \Rightarrow x = 40, y = 30$

$x^2 = 900 \Rightarrow x = 30, y = 40$

أي إن طول القاعدة = 80 m، والارتفاع= 30 m

أو:

طول القاعدة = 60 m، والارتفاع = 40 m

17)

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \Rightarrow (x-2y)(x-y) = 0$

$\Rightarrow x = 2y$, or $x = y$

$x = y \Rightarrow x^2 + xy = x^2 + x^2 = 2x^2 = 6$

$\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}, y = \pm\sqrt{3}$

$x = 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow x^2 + xy = x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2 = 6$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2, y = \pm 1$

الحلول هي: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (2, 1), (-2, -1)$

19)

$x^2 + y^2 = 500$

$y = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{y}{2\pi}$

$V = \pi r^2 x = \pi(\frac{y}{2\pi})^2(x) = \frac{y^2 x}{4\pi} = \frac{250}{\pi}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1000}{x}$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1000}{x} = 500$

$\Rightarrow x^3 - 500x + 1000 = 0$

بحل المعادلة $x \approx 21.28$ cm , $y \approx 6.85$ cm ,

or $x \approx 2.02$ cm , $y \approx 22.25$ cm ,

or $x \approx -23.30$ (مرفوض)

إجابات صفحة 28:

20) افترض أن الزمن= x.

إذن:

عدد الخلايا البكتيرية هو 7300 عند الزمن 0 = x.

$y = 7300(3)^x$

$y = 1773900$

21)

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}(r + r^2)}{r(r + r^2)} = r^{\frac{1}{2}-1} = r^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

22)

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}}(1 - 2y^{-1})}{y^{\frac{1}{2}}(1 - 2y^{-1})} = y^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

23)

$$\frac{1 + x + 2x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + 3x}{2\sqrt{x}}$$

إجابات صفحة 34:

16)

$$y = a(3)^x$$
$$1701 = a(3)^4 \Rightarrow a = 21$$
$$y = 21(x)^x$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 21$$

18)

$$y = 3^{t-2}$$
$$2187 = 3^{t-2}$$
$$2187 = \frac{3^t}{3^2}$$
$$\frac{9}{9} \times 2187 = \frac{3^t}{3^2}$$
$$\frac{19683}{9} = \frac{3^t}{9}$$
$$19683 = 3^t$$
$$3^9 = 3^t$$
$$t = 9$$

19) حجم متوازي المستطيلات هو V، والطول $\imath$، والعرض w، والارتفاع h:

$$V = \imath \times w \times h$$

قسِّم الشكل إلى ثلاثة متوازي مستطيلات:

$$\text{المساحة} = 4^{2x-1} \times 2x \times 5^{1+5x} + 8^{x+1} \times 2x \times 5^{1+5x} + 4^{2x+1} \times 2x \times 5^{1+5x}$$

20) لا يوجد حل للمعادلة الأسية؛ لأنه لا يوجد حل للمعادلة:

$$2x = -1$$

21) اضرب طرفي المعادلة في $x^{\frac{1}{2}}$، فتصبح المعادلة:

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

وبحلها بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال القانون العام، ينتج:

$$x = 3.1$$

22) بالتحليل إلى العوامل، ينتج:

$$\frac{(2\times2\times3\times3)^{x-y+1}}{(2\times3\times3\times3)^{x+y-1}} = (2\times2\times2\times2\times3)^{x+y}$$
$$2 \rightarrow 2x - 2y + 2 - x - y + 1 = 4x + 4y$$
$$\Rightarrow 3x + 7y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$3 \rightarrow 2x - 2y + 2 - 3x - 3y + 3 = x + y$$
$$\Rightarrow 2x + 6y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بحل النظام الخطي، ينتج:

$$(x, y) = (-4.25, 2.25)$$

23)

$$2^x + 3^y = 2^0 + 3^2$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 2^1 + 3^3$$
$$\Rightarrow x = 0, y = 2$$

إجابات (اختبار نهاية الوحدة) صفحة 35:

7) الحل:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{3}{2}, 13.5\right)$$

اختيار ثلاث نقاط عشوائية؛ على أن تقع الأولى بين الحلين، وتكون الثانية أقل من الحل الأول، وتكون الثالثة أكبر من الحل الثاني، فينتج:

$$x > \frac{1}{3}, x < -\frac{2}{3}$$

إجابات (كتاب التمارين) صفحة 7:

17) الحل:

$$x^2 - (p+3)x + 8 = 0$$
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$(p-3)^2 - 4(1)(8) > 0$$
$$p^2 - 6p - 23 > 0$$
$$(-\infty, 3-4\sqrt{2}), (3-4\sqrt{2}, 3+4\sqrt{2}), (3+4\sqrt{2}, \infty)$$
$$p = (3-4\sqrt{2}, 3+4\sqrt{2})$$

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	خطوات تنفيذ مشروع الوحدة	عدد الحصص
تهيئة الوحدة			• كتاب التمارين		1
الدرس 1: أوتار الدائرة وأقطارها ومماساتها.	• يتعرف الوتر، والقطر، والمماس، والقاطع في الدائرة. • يتعرف العلاقات بين الوتر والقطر والمماس والنظريات المرتبطة بها، وتوظيفها لإيجاد أطوال زوايا مجهولة وقياساتها. • يبرهن صحة علاقات باستعمال خصاص الأوتار والأقطار والمماسات.	الدائرة، مركز الدائرة، نصف القطر، القطر، الوتر، القاطع، المماس، نقطة التماس.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	الخطوة الأولى.	3
الدرس 2: الأقواس والقطاعات الدائرية.	• يحسب طول قوس من دائرة. • يحسب مساحة القطاع الدائري. • يحل مسائل تتضمن طول القوس ومساحة القطاع الدائري.	القوس، القطاع الدائري.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	متابعة الخطوة الأولى، والبدء بتنفيذ الخطوة الثانية.	3
الدرس 3: الزوايا في الدائرة.	• يتعرف الزاوية المركزية والزاوية المحيطية والعلاقة بينهما. • يتعرف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية المشتركة في القوس نفسه. • يتعرف الشكل الرباعي الدائري وخصائصه. • يتعرف الزاوية المماسية وعلاقتها بالزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه. • يوظف هذه العلاقات لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في الدائرة.	الزاوية المركزية، الزاوية المحيطية، الزاوية المقابلة لقطر الدائرة، الزاوية المماسية، القوس المقابل، الشكل الرباعي الدائري.	• المنقلة. • المسطرة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة. • جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا. • ورقة المصادر (1).	متابعة الخطوة الثانية، والبدء بتنفيذ الخطوة الثالثة.	3
الدرس 4: معادلة الدائرة.	• يتعرف الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة الدائرة. • يكتب معادلة دائرة إذا عُلم مركزها وطول نصف قطرها. • يجد إحداثيي المركز وطول نصف القطر من معادلة الدائرة. • تحديد إن كان مستقيم معطى يشكل مماسًّا أم لا لدائرة أعطيت معادلتها. • يجد طول القطعة المماسية من نقطة خارجية إلى نقطة التماس على دائرة علمت معادلتها.	معادلة الدائرة، الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، الصورة العامة لمعادلة الدائرة.	• جهاز الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	متابعة الخطوة الثالثة، والبدء بتنفيذ الخطوة الرابعة.	3
استكشاف الدوائر المتماسة.	• يتعرف أوضاع دائرتين مرسومتين في مستوى واحد. • يستكشف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين متماستين من الداخل أو من الخارج.		• برمجية جيوجبرا. • ورقة المصادر (2).	بدء الاستعداد لعرض النتائج.	1
الدرس 5: الدوائر المتماسة.	• يصف أوضاع دائرتين في المستوى. • يحسب طول المماس المشترك الداخلي والخارجي. • يوظف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين، وطول المماس المشترك لإيجاد أطوال مجهولة.	الدوائر المتماسة، المماس المشترك الداخلي، المماس المشترك الخارجي	• جهاز الحاسوب.	استكمال التحضير لعرض النتائج.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.		1
اختبار الوحدة					2
مجموع الحصص					20

الوحدةُ 2

نظرة عامة على الوحدة:

تعلـم الطلبة فيما سـبق الدائرة، ورسـمها، وخصائصها، وحسـاب محيطهـا ومسـاحتها، وسـيتعلمون في هذه الوحدة مماسـات الدائرة، والعلاقات المختلفة بين أقطار الدائرة وأوتارها ومماساتها، ويتعرفون الزوايا في الدائرة، وخصائص المضلـع الرباعي الدائـري، وطول القوس، ومسـاحة القطاع الدائري، والصورتين القياسـية والعامة لمعادلـة الدائـرة، ويكتبـون معادلة الدائـرة إذا توافرت معلومات كافية، ويميزون الدوائـر المتقاطعة والمتباعدة والمتماسة من الداخل والمتماسة من الخارج، ويحسبون طول المماس المشترك.

الوحدةُ 2

الدائرةُ

Circle

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ الدائرةُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بلْ في جميعِ الكونِ. فهيَ تظهرُ جليًّا في صـورِ الكواكبِ، وفي بؤبؤِ العينِ، وفي الفاكهةِ، وجذوعِ الأشجارِ، وغيرِ ذلكَ منَ المخلوقاتِ. وقدِ اسـتفادَ الإنسـانُ منَ الخصائـصِ الفريدةِ لهذا الشـكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسةِ، والصناعةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ محيطِ الدائرةِ، ومساحتِها.
- ✓ تمييزَ حالاتِ تطابُقِ المثلثاتِ، وتشابُهِها.
- ✓ إيجـادَ مجموعِ قيـاسِ زوايا كلٍّ مـنَ المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.
- ✓ إيجـادَ المسـافةِ بيـنَ نقطتيْنِ في المسـتوى الإحداثيِّ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.
- ◄ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائـرةِ، والإفادةَ منْها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ.
- ◄ كتابةَ معادلةِ الدائرةِ، وإيجـادَ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.
- ◄ العلاقةَ بينْ دائرتيْنِ، وماهيةَ المماسّاتِ المشتركةِ.

36

التزابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- إيجاد البُعْد بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

الصف الثامن

- تعرف نظريات المثلث المتطابق الضلعين.
- استخدام البرهان الهندسي في تشابه الأشكال الهندسية وتطابقها.
- تمييز حالات تشابه المثلثات وتطابقها.

الصف السابع

- تعرف عناصر الدائرة وحساب محيطها ومساحتها.

الصف العاشر

- تعرف خصائص الأوتار والأقطار والمماسات في الدائرة.
- حساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري.
- تعرف العلاقات بين الزوايا في الدائرة وتوظيفها لإيجاد قياسات زوايا مجهولة.
- تعرف خصائص المضلع الرباعي الدائري.
- إيجاد معادلة الدائرة بصورها المختلفة.
- تعرف الأوضاع المختلفة لدائرتين في مستوى واحد.
- استنتاج العلاقات الخاصة بالمسافة بين مركزي دائرتين متماستين.
- حساب طول المماس المشترك الداخلي أو الخارجي لدائرتين في مستوى واحد.

مشروعُ الوحدةِ
استعمالاتٌ علميةٌ لخصائصِ الدائرةِ

فكرةُ المشروعِ البحثُ عنِ استعمالاتٍ علميةٍ لخصائصِ الدائرةِ، ووصفِها، ونمذجتِها.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنتْ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في مكتبةِ المدرسةِ (أوْ في شبكةِ الإنترنتْ) عنْ نموذجٍ علميٍّ أوْ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ إحدى الخصائصِ الآتيةِ للدائرةِ:
   - العلاقةُ بينَ الزوايا المركزيةِ والزوايا المحيطيةِ.
   - العلاقةُ بينَ الزاويةِ المماسّيةِ والزاويةِ المحيطيةِ المُشترِكةِ معَها في القوسِ نفسِهِ.
   - الدوائرُ المُتماسَّةُ.
   - معادلةُ الدائرةِ.

2. أكتبُ في مستندِ معالجِ النصوصِ (وورد) فقرةً أَصِفُ فيها النموذجَ الحياتيَّ أوِ العلميَّ الذي اخترتُهُ، مُحدِّدًا خصائصَ الدائرةِ الموجودةِ في هذا النموذجِ، ثمَّ أُفسِّرُها.
3. أُضيفُ إلى المستندِ صورًا توضيحيةً للنموذجِ، ذاكرًا مصدرَ المعلوماتِ والصورِ.
4. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا الرسمِ شكلٍ يُوضِّحُ استعمالَ الخاصيةِ في النموذجِ، وأضعُ عليْهِ قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ جميعَها. وهذهِ بعضُ الإرشاداتِ التي قدْ تُساعِدُ على رسمِ الشكلِ التوضيحيِّ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:
   - لرسمِ دائرةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Circle with Center through Point منْ شريطِ الأدواتِ.
   - لإيجادِ قياسِ زاويةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Angle، ثمَّ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ، وضلعِ انتهائِها.
   - لإيجادِ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ، أنقرُ على أيقونةِ Distance or Length، ثمَّ على القطعةِ المستقيمةِ.
   - لرسمِ مماسٍّ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، أُحدِّدُ أولًا النقطةَ بالنقرِ على أيقونةِ Point، ثمَّ أيقونةِ Tangents.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:
- خطواتِ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، بما في ذلكَ صورةُ الشكلِ الذي رُسِمَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
- معلومةً جديدةً تعرَّفْناها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومُقترَحًا لتوسعةِ المشروعِ.

37

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار تطبيق علمي أو عملي مناسب لخصائص الدائرة.			
2	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
3	التحقُّق من صحة النموذج والصور والرسومات التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	التقرير المكتوب كامل ومنظم			
5	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
6	عرض معلومة جديدة تعلمتها المجموعة في أثناء بحثها وعملها في المشروع.			
7	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:
استعمالات علمية لخصائص الدائرة.

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى تنمية معرفة الطلبة بخصائص الدائرة، والبحث عن نماذج علمية أو تطبيقات حياتية تستعمل فيه إحدى هذه الخصائص أو أكثر، فضلًا عن تنمية مهارات البحث في مصادر المعرفة المتوافرة، والمهارات الشخصية، مثل: التواصل، وحل المشكلات.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية) غير متجانسة، ثم اطلب إليهم أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، وآلة التصوير، فضلًا عن بيان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولًا بأول، وتعزيزه بالصور المناسبة للموضوع.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد مشروع المجموعة، وكتابة تقرير مفصل عن عملهم، وكيف أسهم كلٌّ منهم في إنجاز المشروع، وبيان الصور والرسومات التوضيحية الكاملة، وإعداد عرض تقديمي (Power Point) للمشروع.
- بيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

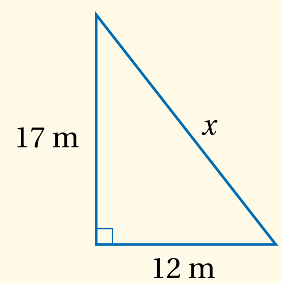
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ. - وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة تضمين العرض تقريرًا يشمل وصفًا للنموذج العلمي أو الحياتي، وتحديد خصائص الدائرة الموجودة في النموذج باستعمال برنامج معالج النصوص (word)، وبيان كيفية تطويره، وتوثيق مصادر الصور التي جمعوها؛ لتعزيز مهاراتهم المعلوماتية، وتدريبهم على أهمية توثيق المصادر.

التقويم القبلي (التشخيصي):

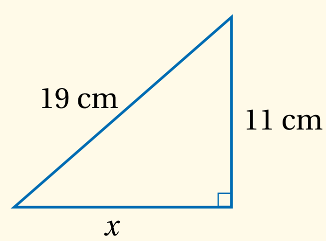
- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين لتساعد طلبتك على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة في عمود (أختبر معلوماتي)، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له في عمود (المراجعة).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

1. أجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال المجاورة مُقرَّبةً إلى منزلة عشرية واحدة.

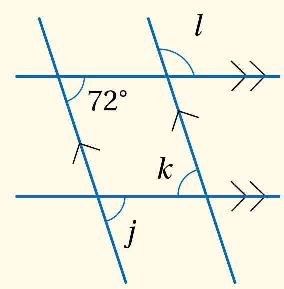
a)



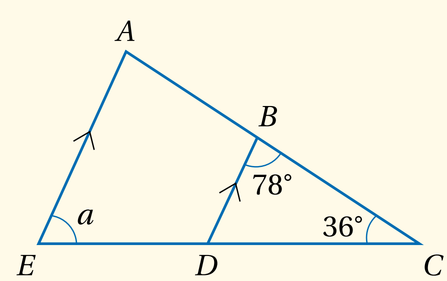
b)

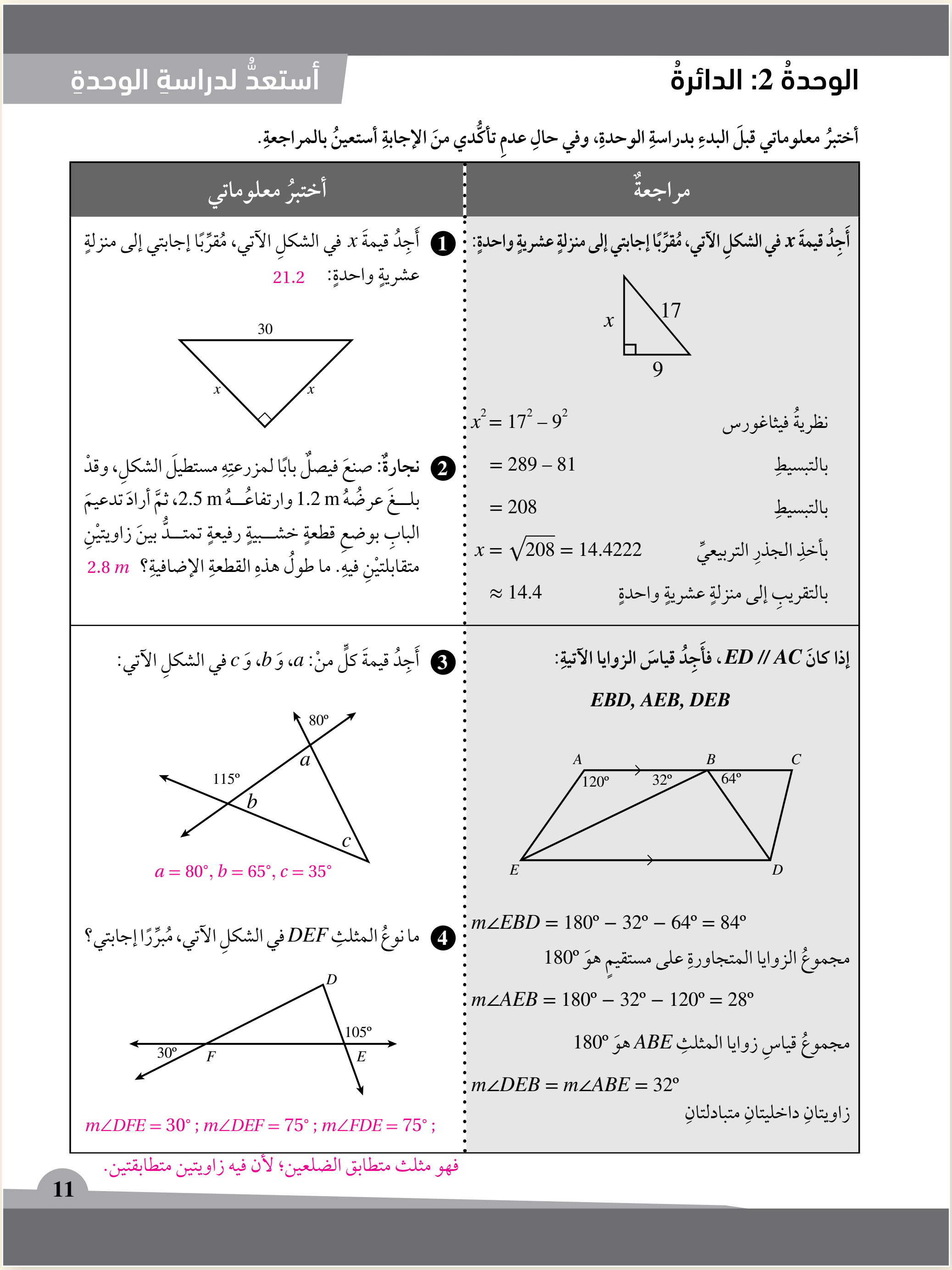


2. أجد قيمة كلٍّ من j، و k، و l في الشكل المجاور.



3. أجد قياس الزاوية AED في الشكل المجاور.





إجابات المسائل الإضافية:

1) a. 20.8 b. 15.5

2) $j = 72°,\ k = 72°,\ l = 108°$

3) $m\angle AED = 66°$

الدرس 1

أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها
Chords, Diameters and Tangents of a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الوتـرِ، والقُطْرِ، والممـاسِّ، وخصائصِ كلٍّ منهـا، والعلاقاتِ التي تربـطُ بعضَها ببعضٍ، وتوظيفُ ذلكَ في إيجادِ أطوالٍ وقياساتِ زوايا مجهولةٍ.

المصطلحاتُ الدائرةُ، المركزُ، الوترُ، القوسُ، القُطْرُ، نصفُ القُطْرِ، المماسُّ، نقطةُ التَّماسِّ، القاطعُ.

مسألةُ اليومِ في حديقةِ منـزلِ عبيرَ طاولـةٌ دائريةٌ، وهيَ تريدُ عمـلَ فتحةٍ عندَ مركزِها لتثبيـتِ عمودٍ يحمل مِظلَّةً بها. كيـفَ يُمكِنُ لعبيرَ تحديدُ مركزِ الطاولةِ؟

الدائرةُ (circle) هيَ المحلُّ الهندسيُّ لنقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى، بحيثُ تظلُّ على البُعْدِ نفسِهِ عنْ نقطةٍ مُحدَّدةٍ تُسـمّى **مركزَ الدائرةِ** (center). أمّا **الوترُ** (chord) فهوَ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ نقطتيْنِ على الدائرةِ، ويُسـمّى الوترُ الذي يمرُّ بمركزِ الدائـرةِ **القُطْرَ** (diameter). ويُطلَقُ على القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ مركزَ الدائرةِ بنقطةٍ عليْها اسمُ **نصفِ القُطْرِ** (radius).

القاطعُ (secant) هوَ مسـتقيمٌ يقطعُ الدائرةَ في نقطتيْنِ، ويحوي وترًا فيها. أمّا المستقيمُ الذي يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ فيُسـمّى **المماسَّ** (tangent). ويُطلَقُ على نقطةِ التقاءِ المماسِّ بالدائرةِ اسمُ **نقطةِ التَّماسِّ** (point of tangency).

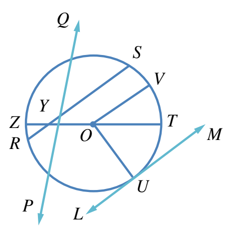
رموزٌ رياضيةٌ
- ترمزُ $\overleftrightarrow{LM}$ إلى المستقيمِ LM.
- ترمزُ LM إلى طولِ القطعةِ المستقيمةِ. أمّا $\overline{LM}$ فترمزُ إلى القطعةِ المستقيمةِ نفسِها.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:

1 **مماسًّا للدائرةِ.**
$\overleftrightarrow{LM}$

2 **أربعةَ أنصافِ أقطارٍ.**
$\overline{OV}, \overline{OT}, \overline{OZ}, \overline{OU}$



الدرس 1

نتاجات الدرس

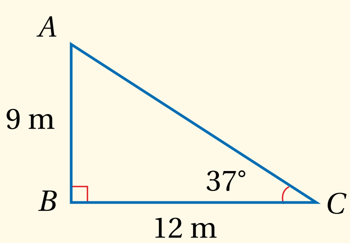
- يتعرف الوتر، والقطر، والمماس، والقاطع في الدائرة.
- يحـدد العلاقـات التـي تربـط الأقطـار والأوتار والمماسات في الدائرة.
- يوظف العلاقات بين الأقطار والأوتار والمماسـات في إيجـاد قياسـات زوايا وأطـوال مجهولة، وحل مسائل حياتية.

التعلم القبلي:

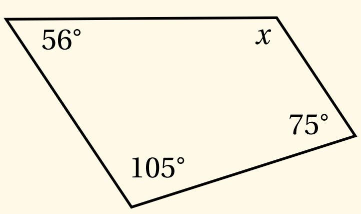
- نظرية فيثاغورس.
- مجموع قياسـات زوايا المثلث، ومجموع قياسـات زوايا الشكل الرباعي.
- خصائص كلٍّ مـن: المثلـث المتطابـق الضلعين، والمثلث المتطابق الأضلاع.
- شروط تطابق مثلثين.

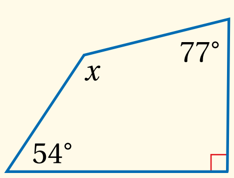
1 التهيئة

- ارسـم المثلث ABC المجاور على اللوح، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد AC، وقياس الزاوية A.

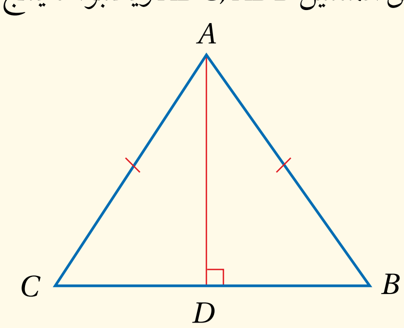


- ارسم الشكلين الرباعيين الآتيين، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد الزوايا المجهولة فيهما.





- ارسـم مثلثًا متطابق الضلعين، ثم ارسم العمود $\overline{AD}$، واطلب إلى الطلبة أن يبينوا سبب تطابق المثلثين ADC, ADB ويكتبوا ما ينتج من هذا التطابق.



2 الاستكشاف

- اطلب إلى الطلبة قراءة (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما مركز الدائرة؟ نقطة داخل الدائرة تبعد المسافة نفسها عن نقاط الدائرة جميعها.
  - » ماذا تسمى المسافة بين المركز وأي نقطة على الدائرة؟ تسمى طول نصف قطر الدائرة.
  - » ماذا تسمى القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين على الدائرة؟ تسمى وترًا للدائرة.
  - » إذا رسمت نصفي القطرين المارين بطرفي الوتر، فما نوع المثلث الناتج؟ متطابق الضلعين.
  - » إذا رسمت عمودًا من مركز الدائرة إلى وتر في الدائرة، فما العلاقة بين المثلثين الناتجين؟ متطابقان.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

3 التدريس

- ذكِّر الطلبة بعناصر الدائرة (المركز، القطر، نصف القطر، الوتر).
- عرِّف القاطع، ومماس الدائرة.
- ارسم شكلًا، ثم اطلب إلى الطلبة أن يُسمّوا المركز، وقطرًا، ونصف قطر، ووترًا في الدائرة.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُبيِّنًا لهم عناصر الدائرة على الرسم، ثم اطلب إليهم ذكر أكثر من مثال على عناصر الدائرة، مثل: الوتر، ونصف القطر، والوتر، والمماس (إن أمكن)، مُؤكِّدًا – عن طريق المناقشة– أن الرسم يحوي قطرًا واحدًا، ومماسًّا واحدًا فقط.

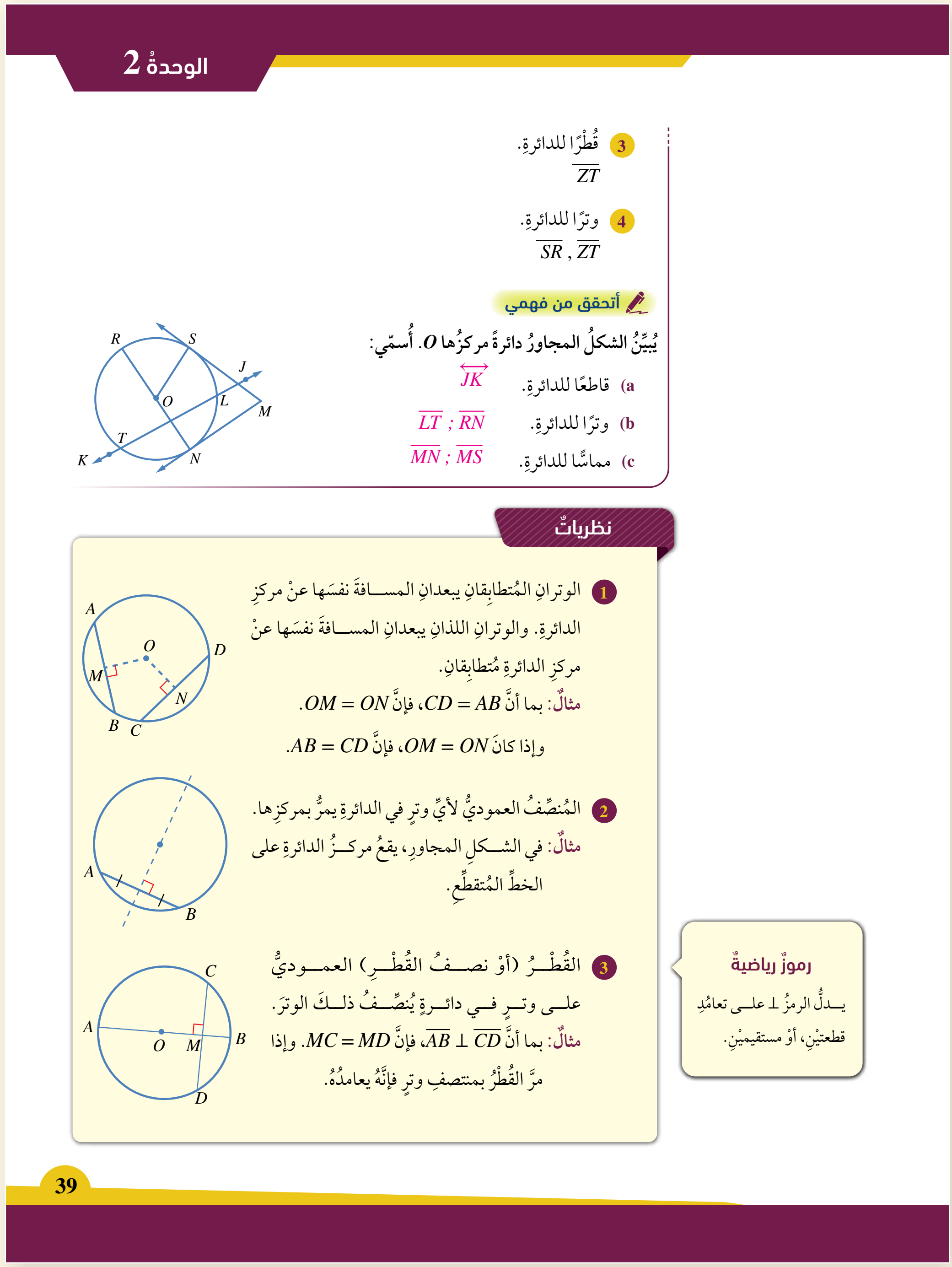
التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

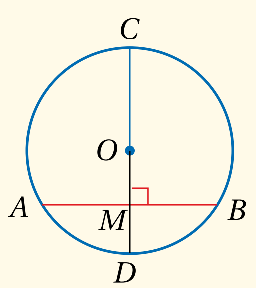
ملاحظات المعلم

إرشادات للمعلم

- ذكِّر كل طالب بضرورة إحضار منقلة ومسطرة وفرجار لرسم الأشكال وقياس الزوايا والأطوال.



- اطلب إلى الطلبة رسم دائرة ووتر فيها، ثم رسم المنصف العمودي لهذا الوتر باستعمال المسطرة والفرجار، وملاحظة دلالة هذا المنصف للدائرة.
- ارسم دائرة مركزها O، وارسم الوتر $\overline{AB}$ فيها، وارسم القطر $\overline{CD}$ الذي يعامد $\overline{AB}$ في النقطة M، ثم اطلب إلى الطلبة تخيل أن نهايتي الوتر $\overline{AB}$ تتحركان على الدائرة من دون تغيير طول $\overline{AB}$، وأن القطر $\overline{CD}$ يتحرك أيضًا بحيث يظل متعامدًا مع الوتر $\overline{AB}$، ثم اسألهم:
  » هل تتغير المسافة بين مركز الدائرة والوتر؟ لا.
  » ماذا تمثل النقطة M بالنسبة إلى الوتر؟ نقطة منتصفه.



- قدِّم النظريات الثلاث في الصفحة 39، ثم ناقِشها مع الطلبة.

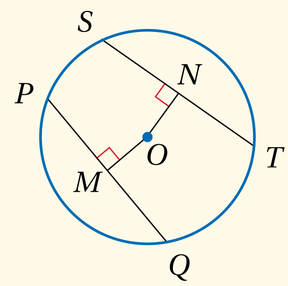
إرشاد: وجِّه الطلبة إلى إمكانية استعمال البيكار (الفرجار المدبب الطرفين) لمقارنة أطوال الأضلاع.

مثال 2

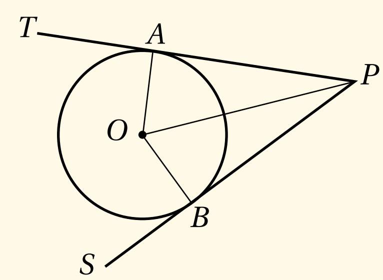
- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال نظريــة الأوتار المتطابقة لإيجاد أطــوال مجهولة في الدائرة.

مثال إضافي

إذا كان $OM = ON$ فــي الشــكل المجــاور، وكان $ST = 3x - 4$، $PQ = x + 6$ و، فأجد SN. 5.5

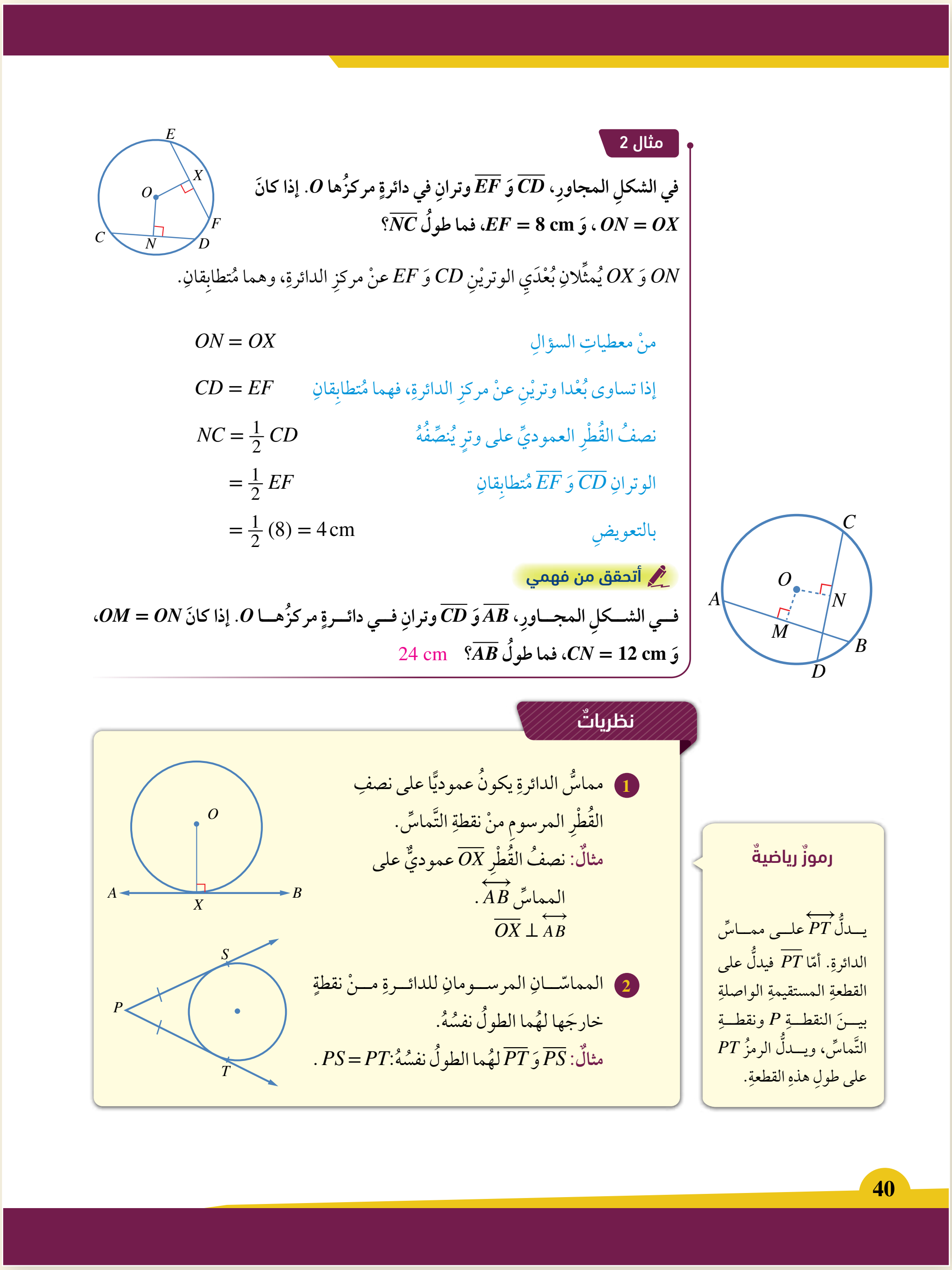


- اطلب إلى الطلبة رســم دائرة، ومماسين لها من نقطة خارجها، ثم رســم نصفي القطريــن المارين بنقطتي التماس، ثم وصــل مركز الدائرة بالنقطة التي رُسِــم منها المماســان كما في الشــكل المجاور، ثم قياس الزاويتين OAP، و OBP، وقياس طولي $\overline{BP}$، و $\overline{AP}$، ثم تدوين ملاحظاتهم.



- قدِّم النظريتين في الصفحة 40، ثم ناقِشهما مع الطلبة.

إرشــاد: الفت انتباه الطلبة إلــى أنَّه يمكنهم اســتعمال حافة المســطرة، أو حافة المثلث القائم من أدوات الهندســة أو حافة الدفتــر لتحديد إذا كان المماس عموديًّا على نصف القطر أم لا.



مثال 2

في الشكلِ المجاورِ، $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $ON = OX$ ، وَ $EF = 8$ cm، فما طولُ $\overline{NC}$؟

ON وَ OX يُمثِّلانِ بُعْدَي الوتريْنِ CD وَ EF عنْ مركزِ الدائرةِ، وهما مُتطابِقانِ.

$ON = OX$ منْ معطياتِ السؤالِ

$CD = EF$ إذا تساوى بُعْدا وتريْنِ عنْ مركزِ الدائرةِ، فهما مُتطابِقانِ

$NC = \frac{1}{2} CD$ نصفُ القُطْرِ العموديِّ على وترٍ يُنصِّفُهُ

$= \frac{1}{2} EF$ الوترانِ $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ مُتطابِقانِ

$= \frac{1}{2}(8) = 4\,\text{cm}$ بالتعويضِ

أتحقق من فهمي

فــي الشــكلِ المجــاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ فــي دائــرةٍ مركزُهــا O. إذا كانَ $OM = ON$، وَ $CN = 12$ cm، فما طولُ $\overline{AB}$؟ 24 cm

نظرياتٌ

1 مماسُّ الدائرةِ يكونُ عموديًّا على نصفِ القُطْرِ المرسوم منْ نقطةِ التَّماسِّ.

مثالٌ: نصفُ القُطْرِ $\overline{OX}$ عموديٌّ على المماسِّ $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$

2 المماسّــانِ المرســومانِ للدائــرةِ مــنْ نقطةٍ خارجَها لهُما الطولُ نفسُهُ.

مثالٌ: $\overline{PS}$ وَ $\overline{PT}$ لهُما الطولُ نفسُهُ: $PS = PT$.

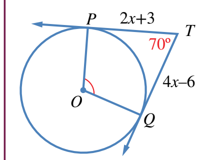
رموزٌ رياضيةٌ

يــدلُّ $\overleftrightarrow{PT}$ علــى مماسِّ الدائرةِ. أمّا $\overline{PT}$ فيدلُّ على القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بيــنَ النقطــةِ P ونقطــةِ التَّماسِّ، ويــدلُّ الرمزُ PT على طولِ هذهِ القطعةِ.

40

مثال 3

جبرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{TP}$ وَ $\overleftrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:



1 أَجِدُ قيمةَ x.

مماسّانِ مرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها	$TP = TQ$
بالتعويضِ	$2x + 3 = 4x - 6$
بإضافةِ $2x - 6$ إلى الطرفيْنِ	$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$
بالتبسيطِ	$9 = 2x$
	$x = \frac{9}{2}$

2 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ POQ.

أفترِضُ أنَّ قياسَ الزاويةِ POQ هوَ y:

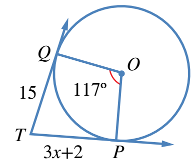
مماسُّ الدائرةِ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ في نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle OQT = m\angle OPT = 90°$
مجموعُ قياسِ الزوايا الداخليةِ للشكلِ الرباعيِّ هو $360°$	$90° + 70° + 90° + y = 360°$
بالتبسيطِ	$250° + y = 360°$
بطرحِ $250°$ منَ الطرفيْنِ	$y = 360° - 250° = 110°$

رموزٌ رياضيةٌ

يرمزُ الحرفُ m في $m\angle OQT$ إلى قياسِ الزاويةِ OQT.

أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{TP}$ وَ $\overrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

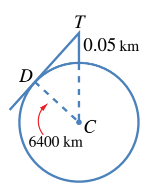


a) أَجِدُ قيمةَ x. 4.33

b) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ PTQ. 63°

مثال 4: من الحياة

أبراجٌ: يرتفعُ برجُ مراقبةٍ 50 m عنْ مستوى الأرضِ. ما أبعدُ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمّةِ البرجِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطْرِها 6400 km تقريبًا؟



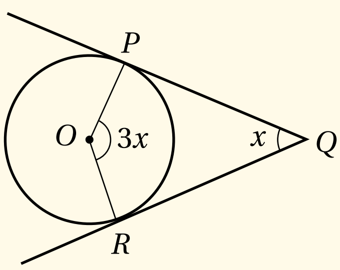
أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المسألةَ.

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال نظريات مماسات الدائرة لإيجاد أطوال وزوايا مجهولة في الدائرة.

مثال إضافي

$\overrightarrow{QP}$ ، و $\overrightarrow{QR}$ مماسان للدائرة في الشكل المجاور. أجد قيمة x. 45°



تنويع التعليم:

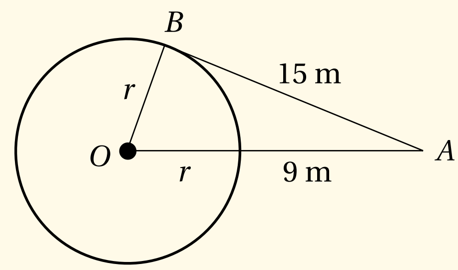
- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط بيان طريقة رسم مماس لدائرة من نقطة عليها. رسم نصف قطر، ثم إنشاء عمود عليه من طرفه على الدائرة باستعمال الفرجار والمسطرة.

مثال 4: من الحياة

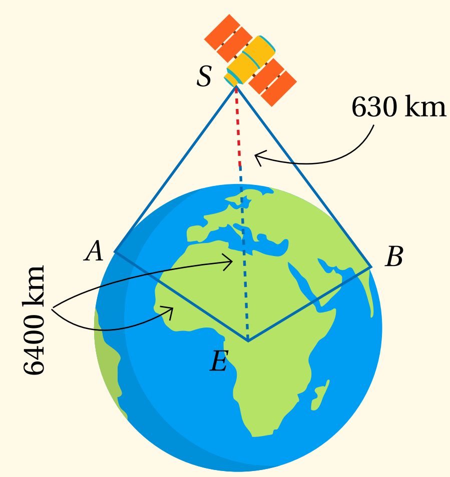
- ناقِش الطلبة في حل المثــال، مُبيِّنًا لهم كيفية توظيف خصائص مماسات الدائرة في موقف حياتي.

مثالان إضافيان

1 يقف مسعود عند النقطة A التي تبعد مسافة 9 m عن حافة حلبة تزلج دائرية الشــكل، تبعد مسافة 15 m عــن نقطة التماس B بين خط بصــره وحافة الحلبة. أجد طول نصف قطر حلبة التزلج. 8 m



2 يرتفــع قمر صناعي 630 km عن ســطح الأرض، ويمكــن منه مشــاهدة المنطقــة المحصــورة بين المماســين $\overline{SA}$ ، و $\overline{SB}$ من سطح الأرض. إذا كانت الأرض كــرة نصف قطرهــا 6400 km تقريبًا، فما طول المماس $\overline{SA}$ ؟ 2909 km تقريبًا.

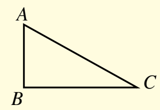


الدائرةُ تُمثِّــلُ الأرضَ، والنقطةُ T تُمثِّلُ قمَّةَ البرجِ، والممــاسُّ $\overleftrightarrow{TD}$ يُمثِّلُ خطَّ البصرِ، ونقطةُ التَّماسِّ D هيَ أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ. ارتفاعُ البرجِ $50\text{ m} = 0.05\text{ km}$

المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ عندَ نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle TDC = 90°$
نظريةُ فيثاغورس	$(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$
بالتعويضِ	$(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$
بطرحِ 40960000 منَ الطرفيْنِ	$640.0025 = (TD)^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$25.3 \approx TD$

إذنْ، المســافةُ التــي تُمثِّــلُ أبعدَ نقطةٍ علــى الأرضِ يُمكِنُ مشــاهدَتُها منْ قمَّــةِ البرجِ هيَ: 25 km تقريبًا.

أتذكَّرُ



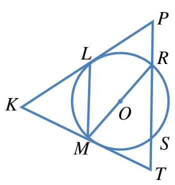
نظريةُ فيثاغــورس: إذا كانَ المثلثُ ABC قائمَ الزاويةِ في B، فإنَّ: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

أتحقق من فهمي

برجُ مراقبةٍ: تبعدُ أقصى نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ برجِ مراقبةٍ مسافةَ **32 km** عنْهُ. ما ارتفاعُ قمَّةِ البرجِ عنْ سطحِ الأرضِ، علمًا بأنَّ طولَ نصفِ قُطْرِ الأرضِ **6400 km** تقريبًا؟ 80 m

أتدرب وأحل المسائل

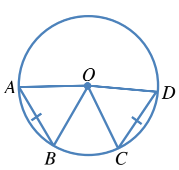
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:



B

1. نصفَيْ قُطْريْنِ. $\overline{OR}\ ;\ \overline{OM}$
2. وتريْنِ. $\overline{LM}\ ;\ \overline{MR}\ ;\ \overline{RS}$
3. مماسَّيْنِ. $\overrightarrow{KP}\ ;\ \overrightarrow{KT}$
4. قاطعًا. $\overleftrightarrow{PT}$

$\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ لهُما الطولُ نفسُهُ في دائرةٍ مركزُها O:

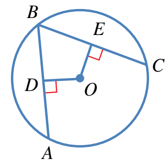


5. ما نوعُ المثلثِ AOB؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش
6. هلِ المثلثانِ AOB وَ COD مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش
7. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ OAB هوَ 65°، فما قياسُ الزاويةِ COD؟ 50°

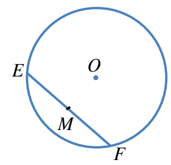
إجابات:

5) متطابق الضلعين؛ لأن $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصفا قطرين في الدائرة، فهما متطابقان.

6) نعم؛ لأن أضلاعهما المتناظرة متطابقة.
$OA = OC,\ OB = OD,\ AB = CD$



8 جَبْرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ وترانِ مُتطابِقانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $OE = x + 9$ ، وَ $OD = 3x - 7$، فما قيمةُ x؟ 8

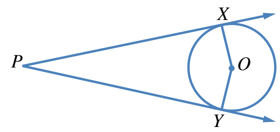


في الشكلِ المجاورِ، $\overline{EF}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها O، والنقطةُ M هيَ منتصفُ الوترِ $\overline{EF}$:

9 هلِ المثلثانِ EOM وَ FOM مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

10 هلِ الزاويةُ EMO قائمةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

11 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ MOF هوَ $72°$، فما قياسُ الزاويةِ MEO؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

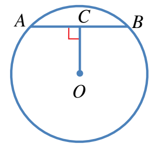


في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{PX}$ وَ $\overrightarrow{PY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

12 هلْ قياسُ الزاويةِ PXO هوَ $90°$؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

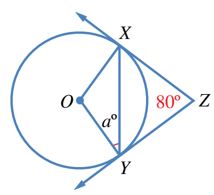
13 أُبيِّنُ أنَّ المثلثَيْنِ XPO وَ YPO مُتطابِقانِ. انظر ملحق الإجابات.

14 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ XPO هوَ $17°$، فما قياسُ الزاويةِ XOY؟ $146°$



15 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وترٌ طولُهُ 6 cm في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ACO هوَ $90°$، وَ $OC = 4$ cm، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟ 5 cm

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات.



17 في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{ZX}$ وَ $\overrightarrow{ZY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ a. 40

43

إجابات:

9) نعم، متطابقان؛ لأن أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

$EM = MF$ (لأن M منتصف EF)

$OE = OF$ (لأنهما نصفا قطرين في الدائرة)

$OM = OM$ (ضلع مشترك)

10) الزاوية EMO قائمة؛ لأن $m\angle EMO = m\angle FMO$ ، ومجموعهما $180°$،
لأن EMF خط مستقيم، فقياس كلٍّ منهما يساوي $90°$

11) $18°$ ؛ لأن: $m\angle MFO = 90° - 72° = 18°$
$m\angle MEO = m\angle MFO$

12) نعم؛ لأن المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة من 1 إلى 7، وتابِعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم- ثم ناقِشهم فيها.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأسئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.
- في السؤال 23، الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة رسم شكل للسؤال، وكتابة المعطيات عليه، واستعمال رموز للعناصر المطلوب إيجادها.

الواجب المنزلي:

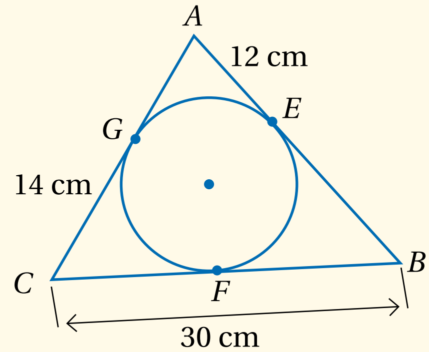
- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 8 إلى 20، إضافةً إلى الأسئلة ذوات الأرقام الفردية في الصفحة الثانية عشرة من كتاب التمارين، ونبِّههم إلى وجوب إكمال الرسم في السؤال التاسع.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقِشهم أيضًا في الأسئلة 9، 13، 15، ثم اطلب إليهم حل مسائل مهارات التفكير العليا (21–24) ضمن مجموعات غير متجانسة.

أخطاء مفاهيمية:

قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل مسائل تتعلق بالزوايا في الدائرة، وبخاصة عندما يكون المطلوب إيجاد أكثر من زاوية واحدة في الشكل؛ لذا وجِّههم إلى كتابة جميع الزوايا التي يعرفونها على الشكل قبل البدء بالحل.

5 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط حساب محيط المثلث ABC المجاور الذي تمس أضلاعه الدائرة في النقاط: E، و F، و G.
84 cm

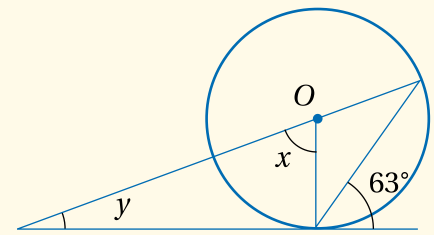


تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة بدء البحث عن أحد النماذج العلمية أو الحياتية التي تستعمل خصيصة أو أكثر من خصائص الدائرة، وتحديد هذه الخصيصة.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة تلخيص ما تعلموه عن المماسات والأقطار في هذا الدرس، واستعماله لإيجاد قيمة x و y في الشكل المجاور. $x = 54°;\ y = 36°$

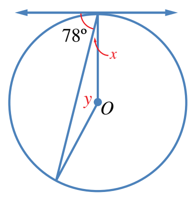


المفاهيم العابرة:

- أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي بند (**مسألة اليوم**) بداية الدرس، عزِّز الوعي **بالقضايا الأخلاقية** (**الجمال**) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن تقدير الجمال، وتأثير زراعة الحدائق وتنسيقها في زيادة درجة السعادة لديهم، ثم اسألهم:
  - » أيُّكم يحب الحدائق؟
  - » كيف تعتني بها؟
- ثم اسألهم:
  - » اذكر حالات أو أشياء تحبها وتراها جميلة.

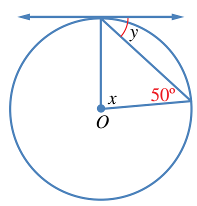
يَظهرُ في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ x وَ y في كلِّ حالةٍ.

18



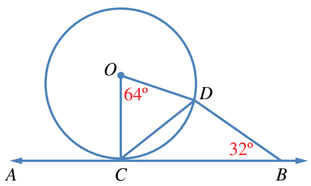
$x = 12°\ ,\ y = 156°$

19



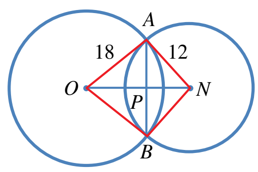
$x = 80°\ ,\ y = 40°$

20 في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O في النقطةِ C. لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
انظر الهامش.



مهارات التفكير العليا

21 **تحدٍّ:** $\overline{AB}$ وترٌ مشتركٌ بينَ دائرتيْنِ متقاطعتيْنِ، وهوَ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{ON}$ الواصلةِ بينَ مركزيْهِما. إذا كانَ $AB = 14$ cm، فما طولُ $\overline{ON}$؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر ملحق الإجابات.



22 **برهانٌ:** $\overline{AB}$، وَ $\overline{CD}$ وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N. أُثبِتُ أنَّ لهُما البُعْدَ نفسَهُ عنِ النقطةِ N.
انظر ملحق الإجابات.

23 **تبريرٌ:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A، وطولُ نصفِ قُطْرِها 3 cm، وَ $BA = 5$ cm. قالَتْ سارةُ إنَّ $BN = 4$ cm؛ لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هلْ قولُ سارةَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
انظر ملحق الإجابات.

24 **أَكتبُ:** كمْ مماسًّا يُمكِنُ أنْ يُرسَمَ للدائرةِ منْ نقطةٍ عليْها، ومنْ نقطةٍ خارجَها، ومنْ نقطةٍ داخلَها؟ أُبرِّرُ إجابتي.
يمكن رسم مماس واحد فقط للدائرة من نقطة عليها، ويمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارجها، ولا يمكن رسم أي مماس للدائرة من نقطة داخلها؛ لأن أي مستقيم مرسوم من نقطة داخل الدائرة يقطعها في نقطتين.

44

إجابات:

20) المثلث ODC متطابق الضلعين؛ لأنّ:

نصفا قطرين في الدائرة $OD = OC$

$m\angle CDO = m\angle DCO = (180° - 64°) \div 2 = 58°$

$m\angle DCB = 90° - 58° = 32°,\ \ m\angle DCB = m\angle DBC = 32°$

إذن: المثلث BCD متطابق الضلعين؛ لأن فيه زاويتين متطابقتين.

الدرس 2

الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ
Arcs and Sectors

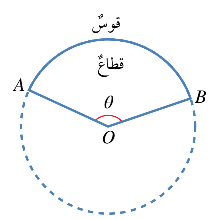
فكرةُ الدرسِ حسابُ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ، وحَلُّ مسائلَ تتعلَّقُ بهما.

المصطلحاتُ القوسُ، القطاعُ.

مسألةُ اليومِ أَعَدَّتْ عفافُ فطيرةَ بيتزا في وعاءٍ دائريٍّ طولُ قُطْرِهِ 24 cm. وبعدَ أنْ خبزَتْها أحدثَتْ فيها شَقَّيْنِ مِنَ المركزِ إلى الطرفِ، بحيثُ كانَ قياسُ الزاويةِ بينَهُما 45°. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ مساحةِ الجزءِ الذي قطعَتْهُ عفافُ مِنَ الفطيرةِ؟

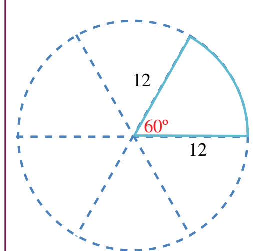
القوسُ (arc) هوَ جزءٌ مِنَ الدائرةِ مُحدَّدٌ بنقطتيْنِ عليْها. و**القطاعُ** (sector) هوَ جزءٌ مِنَ الدائرةِ محصورٌ بينَ قوسٍ منْها ونصفَيِ القُطْرَيْنِ اللذيْنِ يمرّانِ بطرفَيِ القوسِ.

تُمثِّلُ الزاويةُ AOB في الشكلِ المجاورِ زاويةَ القطاعِ الذي يُعَدُّ كسرًا مِنَ الدائرةِ. ويُمكِنُ استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لكتابةِ هذا الكسرِ، وذلكَ بقسمةِ قياسِ الزاويةِ على الدورةِ الكاملةِ؛ أيْ: $\frac{\theta}{360°}$، حيثُ θ قياسُ زاويةِ القطاعِ.



مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ:

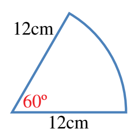


1 **طولَ القوسِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).**

القطاعُ كسرٌ مِنَ الدائرةِ، وهذا الكسرُ هوَ $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$. وبما أنَّ طولَ قُطْرِ الدائرةِ 24 cm، فإنَّ طولَ محيطِها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذنْ، طولُ القوسِ يساوي $\frac{1}{6}$ طولِ محيطِ الدائرةِ؛ أيْ:

$24\pi \div 6 = 4\pi$ cm



تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يحسب طول قوس من دائرة.
- يحسب مساحة القطاع الدائري.
- يحل مسائل على طول القوس، ومساحة القطاع الدائري.

التعلم القبلي:

- حساب محيط الدائرة.
- حساب مساحة الدائرة.

1 التهيئة

- ارسم على اللوح دائرتين، نصف قطر كلٍّ منهما 5 cm، و 10 cm
- اطلب إلى الطلبة حساب محيطيهما، ومساحتيهما.
- ناقِش الطلبة في العلاقة بين نصفي القطرين والمحيطين والمساحتين؛ لاستنتاج أنَّه إذا تضاعف نصف القطر مرتين فإنَّ المحيط سيتضاعف مرتين، في حين تتضاعف المساحة 4 مرات.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) ثم اسألهم:
  - » ما قياس زاوية الدورة الكاملة؟ 360°
  - » ما الكسر الذي تمثله الزاوية 45° من الدورة الكاملة؟ $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$
  - » ما مساحة الفطيرة كاملة؟ $144\pi \approx 452.4\text{cm}^2$
  - » ماذا يمثل الجزء الذي قطعته عفاف من الفطيرة؟ $\frac{1}{8}$ الفطيرة.

3 التدريس

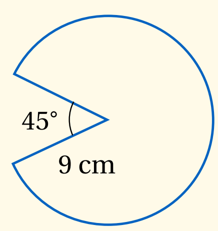
- اطلب إلى الطلبة كتابة محيط دائرة بدلالة نصف قطرها r، ثم كتابة طول الجزء المنحني من نصف تلك الدائرة وربعها.
- عرِّف القوس، والقطاع الدائري، ثم خذ قوسًا يقابل زاوية قياسها $40°$ عند مركز الدائرة، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما الكسر الذي يمثله هذا القوس من محيط الدائرة؟ $\frac{1}{9}$
  - » ما طول هذا القوس؟ 8.37 cm
- اسأل الطلبة عن مساحة القطاع الذي زاويته $40°$. 50.24cm^2
- وضِّح للطلبة أنه إذا كان القوس AB يقابل الزاوية θ عند مركز دائرة نصف قطرها r، فإن طول القوس AB يساوي $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$، وإن مساحة هذا القطاع الدائري هي: $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
- أكِّد للطلبة أن قياس زاوية القطاع هو الذي يحدد الكسر الذي يمثله القوس من محيط الدائرة، وتمثله مساحة القطاع من مساحة الدائرة، وأن القانون أقل أهمية.

مثال 1

- شارِك الطلبة في حل المثالين 1 و2 اللذين يبينان كيفية حساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري إذا عُلِمت زاويته.

مثال إضافي

أجد طول القوس ومساحة القطاع الدائري المجاور، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلة عشرية واحدة.



$\ell \approx 49.5\text{ cm}\,;\ A \approx 222.7\text{ cm}^2$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

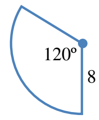
---

2 مساحةَ القطاعِ.

مساحةُ الدائرةِ هيَ: $\pi \times 12^2 = 144\pi\text{ cm}^2$

مساحةُ القطاعِ تساوي $\frac{1}{6}$ مساحةِ الدائرةِ؛ أيْ: $144\pi \div 6 = 24\pi\text{ cm}^2$

أتحقق من فهمي



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ طولَ القوسِ، ومساحةَ القطاعِ الدائريِّ. $\ell = 16.8$ $A \approx 67.0$

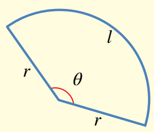
تعرَّفْنا في المثالِ السابقِ أنَّ القطاعَ هوَ كسرٌ منَ الدائرةِ، وأنَّهُ يُمكِنُ دائمًا استعمالُ قياسِ زاويةِ القطاعِ لحسابِ طولِ القوسِ ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ θ^o، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ r، وطولُ القوسِ l، ومساحةُ القطاعِ A، فإنَّ:

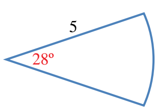
$$l = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$$



مثال 2

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



زاويةُ القطاعِ هيَ $28°$، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 5 وحداتِ طولٍ:

$l = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$ قانونُ طولِ القوسِ

$l = \frac{28^o}{360^o} \times \pi \times 2 \times 5$ بتعويضِ $\theta = 28^o, r = 5$

≈ 2.4 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، طولُ هذا القوسِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 2.4 وحدةِ طولٍ.

$A = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$= \frac{28^o}{360^o} \times \pi \times 5^2$ بتعويضِ $r = 5, \theta = 28^o$

≈ 6.1 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إرشادات للمعلم

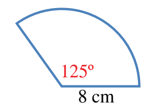
المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في حل المثال الإضافي فيعوضون الزاوية $45°$ لإيجاد طول القوس، أو مساحة القطاع. أكد عليهم أن قياس الزاوية يساوي $315°$

إذنْ، مساحةُ هذا القطاعِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 6.1 وحدةٍ مربعةٍ.

أتحقق من فهمي

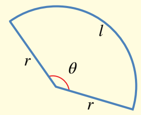


أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ. $\ell = 17.5$ cm
$A \approx 69.8$ cm^2

مفهومٌ أساسيٌّ

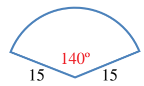
محيطُ القطاعِ الدائريِّ (L) هوَ المسافةُ حولَ القطاعِ، وهيَ تساوي طولَ قوسِ القطاعِ، مضافًا إليْهِ مِثْلا طولِ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$



مثال 3

أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 140°، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 15 وحدةَ طولٍ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$ قانونُ محيطِ القطاعِ

$$= (\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15) + 2 \times 15$$ بتعويضِ $r = 15, \theta = 140^\circ$

$$\approx 66.6519$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، محيطُ هذا القطاعِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 66.7 وحدةَ طولٍ.

رموزٌ رياضيةٌ

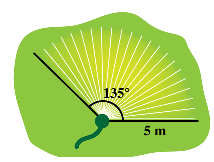
يرمزُ الحرفُ l إلى طولِ القوسِ، ويرمزُ الحرفُ L إلى محيطِ القطاعِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ محيطَ قطاعٍ دائريٍّ زاويتُهُ 225°، في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها 50 cm، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 296.3 cm

مثال 4: من الحياة

حديقةُ منزلٍ وُضِعَ في أحدِ أطرافِها مِرَشٌّ للماءِ، يدورُ حولَ الرأسِ بزاويةٍ مقدارُها 135°، فيصلُ الماءُ إلى مسافةِ 5 m منَ المِرَشِّ. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ التي سيرويها هذا المِرَشُّ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



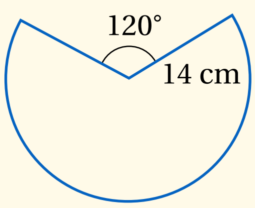
إرشاد: نبه الطلبة أنه عند تعويض قيمة π فإنهم يحصلون على إجابة تقريبية، وتكون الإجابة التي تحوي π هي الإجابة الدقيقة.

مثال 3

- عرِّف للطلبة مفهوم محيط القطاع الدائري، مُبيِّنًا لهم كيفية حسابه.
- شارِك الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية حساب محيط قطاع دائري.

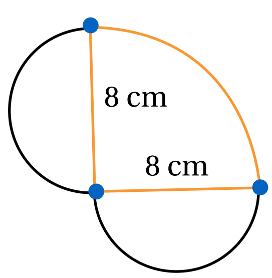
مثال إضافي

أجد محيط القطاع الدائري المجاور، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلة عشرية واحدة. 86.6 cm



أخطاء مفاهيمية:

- قد يغفل بعض الطلبة عن إضافة مثلي طول نصف قطر الدائرة عند حساب محيط القطاع الدائري، وذلك بكتابة طول القوس فقط إجابة للمحيط؛ لذا نبِّههم إلى ذلك، واذكر أمثلة على حساب محيط نصف دائرة، وربع دائرة، وأشكال مركبة تحوي أقواسًا من دوائر.
- في المقابل، قد يضيف بعض الطلبة مثلي طول نصف القطر عندما لا يلزم ذلك في حال تكوّن المحيط من خطوط منحنية فقط، كما في المثال الآتي.



» يتكون الشكل المجاور من ربع دائرة، طول نصف قطرها 8 cm، ومن نصفي دائرتين. أجد محيط الشكل. 12π

- أخبر الطلبة أنه لا يجوز استعمال قانون محيط القطاع الدائري في هذه الحالة، وأن المحيط يساوي مجموع أطوال الأقواس الثلاثة.

مثال 4: من الحياة

- شـارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يعرض لمسألة حياتية يراد حساب مساحة قطاع دائري فيها.

مثال إضافي

- في محل لبيع البيتزا يوجد نوعان من شــطائر البيتزا، أحدهمــا قطره 35 cm، وهو يقســم إلــى قطاعات زاويتها 60°، والآخر قطره 40 cm، وهو يقســم إلى قطاعات زاويتها 45°. ما الفرق بين مساحة قطعة بيتزا من النوع الأول وأخرى من النوع الثاني؟ $3.3\ cm^2$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المســائل)، ثم اطلب إليهم حل الأســئلة من 1 إلى 11، وتابِعهم في هذه الأثناء.

مهارات التفكير العليا

- أشــرِك الطلبــة كافةً في حــل هذه المســائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّــن الطلبة كافةً من حل المســائل جميعها، ولكن يجب عليهــم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلب علــى ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانســة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأســئلة ذوات الأرقام الزوجية من 12 إلى 22، إضافةً إلى الأســئلة ذوات الأرقــام الفردية في الصفحة الثالثة عشــرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقِشــهم أيضًا في الأسئلة 23 ,21 ,19 ,17 ,13 .

تُمثِّلُ المنطقةُ التي سيرويها المِرَشُّ قطاعًا دائريًّا زاويتُهُ 135°، وطولُ نصفِ قُطْرِهِ 5 m:

قانونُ مساحةِ القطاعِ $A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

بتعويضِ $r = 5, \theta = 135°$ $= \frac{135°}{360°} \times \pi \times 5^2$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 29.5

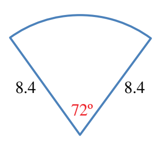
إذنْ، مساحةُ هذهِ المنطقةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: $29.5\ m^2$

أتحقق من فهمي

طولُ عقربِ الدقائقِ في ســاعةِ حائطٍ هوَ 15 cm. ما المســافةُ التي يقطعُها رأسُ العقربِ في حركتِهِ منَ العددِ 9 إلى العددِ 2؟ 39.3 cm

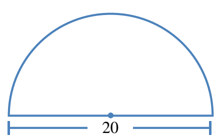
أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا:

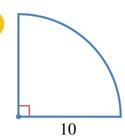


1. أُعبِّرُ بكسرٍ عنِ الجزءِ الذي يُمثِّلُهُ هذا القطاعُ منَ الدائرةِ. $\frac{1}{5}$
2. أجِدُ طولَ القوسِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 10.6
3. أجِدُ مساحةَ القطاعِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. 44.3

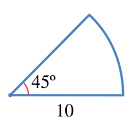
أجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

4.


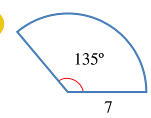
$\ell = 10\pi$
$A = 50\pi$

5.


$\ell = 5\pi$
$A = 25\pi$

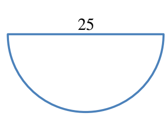
6.


$\ell = 2.5\pi$
$A = 12.5\pi$

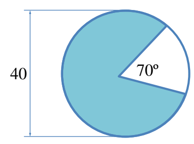
7.


$\ell = 5.25\pi$
$A = 18.375\pi$

8. أجِدُ مساحةَ نصفِ الدائرةِ المجاورةِ، ثمَّ أجِدُ محيطَها. 245.4; 64.3



9 أجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ المجاورِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). أُبرِّرُ إجابتي.

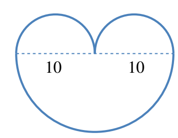


$322.2\ \pi$

10 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. بقسمة مساحة الفطيرة على 8

$56.5\ cm^2$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:

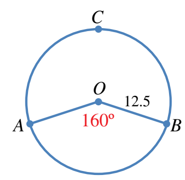


11 أجِدُ محيطَ الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). 20π

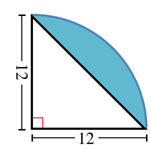
12 أجِدُ مساحةَ الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). 75π

13 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قُطرِها 12.5 وحدةِ طولٍ.

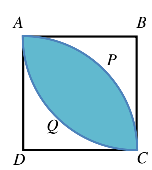
أجِدُ طولَ القوسِ ACB. 43.6



14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ ربعَ دائرةٍ. أجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). $36\pi - 72$



15 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 8 cm، ويُمثِّلُ APC وَ AQC قوسَيْنِ منْ دائرتيْنِ مركزاهُما D وَ B على التوالي. أجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). $32\pi - 64$



16 صمَّمَ مهندسٌ مِرَشَّ مياهٍ لريِّ منطقةٍ مساحتُها $100\ m^2$ على هيئةِ قطاعٍ دائريٍّ طولُ نصفِ قُطرِهِ 15 m. ما زاويةُ دورانِ هذا المِرَشِّ؟ $51°$

المفاهيم العابرة:

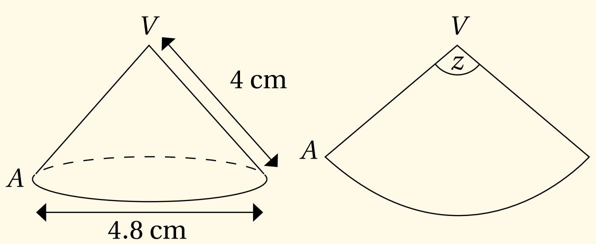
- أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي المثال 4 من الحياة، عزِّز الوعي **بالقضايا البيئية (ترشيد استهلاك المياه)** عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهمية ترشيد استهلاك الماء في حفظ التوازن البيئي والمحافظة على الموارد المائية.
- وجِّه الطلبة إلى التحدث عن مقترحاتهم، ودور كلٍّ منهم في المحافظة على التوازن البيئي وترشيد استهلاك الماء.
- استمع لمقترحاتهم، مُعزِّزًا الجيد منها.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط السؤال الآتي:
  » يبين الشكل الآتي مخروطًا من الورق المقوى، قطر قاعدته 4.8 cm، وطول راسمه 4 cm، إذا قُصَّ على طول المستقيم AV، وبُسِطَ ليُكوِّن القطاع الدائري المُبيَّن في الشكل، فما قياس الزاوية z؟ $216°$



تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة متابعة البحث عن أحد النماذج العلمية أو الحياتية التي تستعمل خصيصة أو أكثر من خصائص الدائرة، وتحديد هذه الخصيصة، وكذلك التقاط صور توضيحية للنموذج، وبدء كتابة تقرير باستعمال مستند معالج النصوص (وورد) يتضمن وصفًا للنموذج مع الصور.
- ذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم والصور.

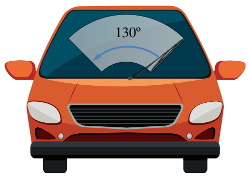
6 الختام

- ارسم قطاعين دائريين، زاوية الأول $40°$، وطول نصف قطره $4\ cm$، وزاوية الثاني $20°$ ، وطول نصف قطره $8\ cm$،
- ثم اسأل الطلبة:
  - » أي القطاعين قوسه أطول؟
  - » أيهما محيطه أطول؟
  - » أيهما مساحته أكبر؟
- امنح الطلبة دقيقتين أو ثلاث دقائق للتفكير ضمن مجموعات ثنائية، ثم تقديم ملاحظاتهم. (طولا القوسين متساويان، محيط الثاني أطول، مساحة القطاع الثاني تساوي مثلي مساحة القطاع الأول).
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على قطاعات دائرية تشبه القطاعين السابقين، ولها طول القوس نفسه.

من الإجابات المحتملة:

$180°$ و $2\ cm$؛ $60°$ و $6\ cm$؛ $120°$ و $3\ cm$؛ $22.5°$ و $16\ cm$

17) **سيارات:** يُبيّنُ الشكلُ المجاورُ ماسحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شفرةِ الماسحةِ $40\ cm$، وطولُ شفرةِ الماسحةِ معَ ذراعِها $66\ cm$، فما مساحةُ الزجاجِ التي تُنظِّفُها الماسحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟ انظر الهامش.



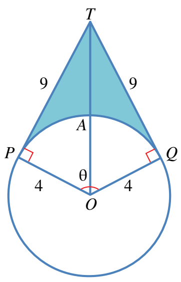
مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O ، وطولُ نصفِ قُطرِها $4\ cm$.
إذا كانَ $TP = TQ = 9\ cm$، فأجِدُ:

18) قياسَ الزاويةِ θ. انظر الهامش.

19) طولَ القوسِ PAQ. $9.2\ cm$

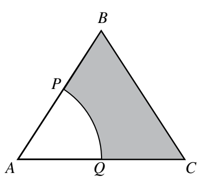
20) مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ. $17.6\ cm^2$



21) **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ دائرتيْنِ، نصفُ قُطرِ الأولى مختلفٌ عنْ نصفِ قُطرِ الثانيةِ، ثمَّ أرسمُ قطاعًا دائريًا في كلِّ دائرةٍ، بحيثُ يكونُ للقطاعيْنِ المساحةُ نفسُها. انظر الهامش.

22) **تحدٍّ:** اشترى سعيدٌ فطيرةَ بيتزا دائريةَ الشكلِ طولُ قُطرِها $36\ cm$، ثمَّ قسَّمَها إلى قطعٍ متساويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَ منها قطعتيْنِ تُمثِّلانِ معًا $180\ cm^2$ منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ. $32°$

23) **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ مثلثًا مُتطابقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ $6\ cm$. إذا كانَتِ النقطتانِ P وَ Q تُنصِّفانِ الضلعيْنِ $\overline{AB}$ وَ $\overline{AC}$ على التوالي، وكانَ APQ قطاعًا دائريًّا منْ دائرةٍ مركزُها A، فأَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ. انظر ملحق الإجابات.



إرشاد: ذكِّر الطلبة بكيفية إيجاد قياس زاوية في مثلث قائم الزاوية باستعمال النسب المثلثية.

إجابات:

17) $A = \frac{130}{360} \times 66^2 \times \pi - \frac{130}{360} \times 26^2 \times \pi \approx 4175\ cm^2$

18) $\tan(\frac{1}{2}\theta) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\theta \approx 66° \Rightarrow \theta \approx 132°$

21) ستتنوع إجابات الطلبة. وهذا مثال على إحدى الإجابات:

دائرة نصف قطرها $12\ cm$، وزاوية القطاع $60°$ مع دائرة نصف قطرها $6\ cm$، وزاوية القطاع $240°$، أو نصف القطر $24\ cm$، والزاوية $15°$ مساحة هذه القطاعات الثلاثة هي $75.4\ cm^2$ تقريبًا.

الدرس 3

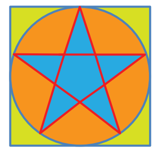
الدرسُ 3

الزوايا في الدائرةِ
Angles in a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ، وتوظيفُها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ وحَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

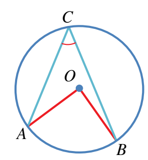
المصطلحاتُ الزاويةُ المركزيةُ، الزاويةُ المحيطيةُ، القوسُ المقابلُ، الزاويةُ المُقابِلةُ لقُطْرِ الدائرةِ، الرباعيُّ الدائريُّ، الزاويةُ المماسيةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ تصميمًا مُكوَّنًا منْ نجمةٍ خماسيةٍ منتظمةٍ محاطةٍ بدائرةٍ يحيطُ بها مربَّعٌ. ماذا تُسمّى الزوايا عندِ رؤوسِ النجمةِ؟ كيفَ نجدُ قياسَ كلٍّ منْها؟



تُسمّى الزاويةُ التي يكونُ رأسُها في مركزِ الدائرةِ، وضلعاها نصفَيْ قُطْرَيْنِ للدائرةِ **زاويةً مركزيةً** (central angle). ففي الشكلِ الآتي، AOB زاويةٌ مركزيةٌ في الدائرةِ التي مركزُها O، ويُسمّى القوسُ $\widehat{AB}$ **القوسَ المقابلَ** (subtended arc).

يُسمّى $\widehat{AB}$ القوسَ الأصغرَ، ويُسمّى $\widehat{ACB}$ القوسَ الأكبرَ.



تُسمّى الزاويةُ التي يقعُ رأسُها على الدائرةِ، ويكونُ ضلعاها وترَيْنِ في الدائرةِ **زاويةً محيطيةً** (inscribed angle). ففي الشكلِ السابقِ، الزاويةُ ACB محيطيةٌ، والزاويةُ AOB مركزيةٌ، وهما مرسومتانِ على نفسِ القوسِ $\widehat{AB}$. وعندَ قياسِ هاتيْنِ الزاويتيْنِ سنجدُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ AOB يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.

نظريةٌ

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ:

$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$

51

نتاجات الدرس

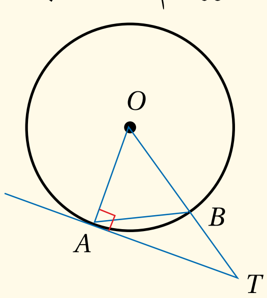
- يتعرف العلاقة بين قياسي الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المرسومتان على القوس نفسه في الدائرة.
- يتعرف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- يتعرف العلاقة بين قياسات زوايا الشكل الرباعي الدائري.
- يتعرف العلاقة بين قياسي الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.
- يوظف العلاقات بين قياسات الزوايا في الدائرة في حل مسائل رياضية وحياتية.

التعلم القبلي:

- معرفة المفردات الخاصة بالدائرة (مركز، نصف قطر، قطر، وتر، قاطع، مماس، قوس).
- مجموع قياسات كلٍّ من زوايا المثلث، وزوايا الشكل الرباعي، والزوايا حول نقطة.
- العلاقات بين الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين.
- خصائص كلٍّ من المثلث المتطابق الضلعين، والمثلث المتطابق الأضلاع، ومتوازي الأضلاع.

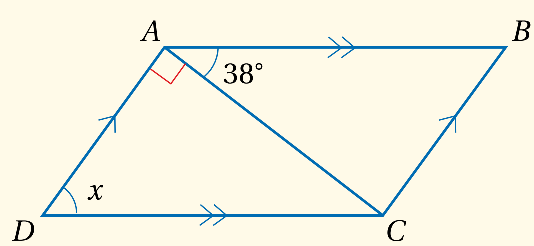
1 التهيئة

- ارسم على اللوح الشكل المجاور، ثم اسأل الطلبة:



» ماذا تسمى $\overline{OB}$؟
تسمى نصف قطر.
» ماذا تسمى $\overline{AB}$؟
تسمى وترًا.
» ماذا يسمى $\overrightarrow{TA}$؟
يسمى مماسًا.
» ما نوع المثلث OAB؟ لماذا؟ متطابق الضلعين؛ لأن $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصفا قطرين متطابقان.
» إذا كان قياس الزاوية ABO هو $65°$، فما قياس الزاوية AOB؟ لماذا؟ $50°$؛ لأن زاويتي القاعدة متطابقتان، ومجموع زوايا المثلث هو $180°$

- ارسم على اللوح الشكل المجاور، ثم اسأل الطلبة:



» ماذا يسمى هذا الشكل الرباعي؟ ما خصائصه؟
» ما قيمة x؟ ولماذا؟ $52°$

- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
» من يؤيد الإجابة؟
» من لديه إجابة أخرى؟
» اذكرها.
- وبهذا يشارك أكبر عدد منهم، وتتعزز لديهم مهارات التواصل، وتقبُّل الرأي الآخر.

2 الاستكشاف

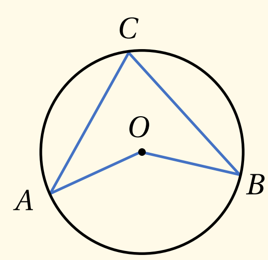
- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما المضلع المنتظم؟ مضلع لجميع أضلاعه الطول نفسه، ولجميع زواياه القياس نفسه.
  - » ماذا يسمى الشكل الظاهر في وسط النجمة؟ يسمى مضلعًا خماسيًّا منتظمًا.
  - » ما قياس كل واحدة من الزوايا الداخلية في هذا المضلع الخماسي المنتظم؟ 108°
  - » ما قياس زوايا أحد المثلثات الصغيرة الخمسة الظاهرة في الشكل؟ $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

إرشادات للمعلم

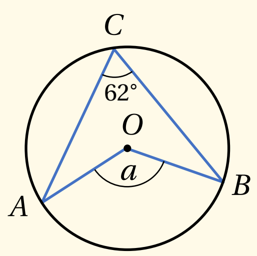
ذكِّر كل طالب بضرورة إحضار منقلة ومسطرة وفرجار لرسم الأشكال وقياس الزوايا والأطوال.

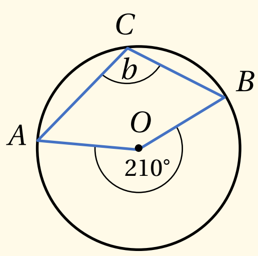
3 التدريس

- اطلب إلى كل طالب رسم الشكل المجاور على دفتره، علمًا بأن O هو مركز الدائرة.



- عرِّف للطلبة الزاوية المركزية، والزاوية المحيطية، والقوس المقابل لهما.
- اطلب إلى الطلبة تلوين الزاويــة c بلون غامق، والزاوية AOB بلون فاتح، ثم قَصَّ الزاويتين.
- اطلب إلى الطلبة ثني الزاوية O من المنتصف بحيث ينطبق الضلعان OA و OB، ثم وضع الزاوية C فوقها، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- اسأل أحد الطلبة:
  - » ما العلاقة بين قياس الزاويتين ACB، وAOB؟ قياس الزاوية AOB يساوي مثلي قياس الزاوية ACB.
  - » من يوافقه الرأي؟
  - » من لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكرها.
- وضِّح للطلبة أن هذا صحيــح دائمًا، ثم اكتب نص النظرية على اللوح، أو اعرضها أمامهم على لوحة من الكرتون.
- اذكر أمثلة عددية بسيطة ومباشرة، من مثل السؤالين الآتيين:
  - » ما قيمة كلٍّ من a، وb؟





- اســتمع لإجابات الطلبة، وقــدِّم لهم التغذيــة الراجعة والدعم اللازم في حينه.

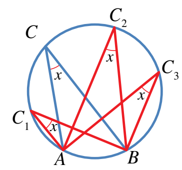
إرشادات للمعلم

المجــال العاطفــي لا يقــل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابــة الصحيحة، فمن يســتطيع إعطاء إجابة أخــرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المســتخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

إذا رســمْنا زوايا محيطيةً أُخرى مُقابِلةً للقوسِ AB سنجدُ أنَّ لها القياسَ نفسَهُ.



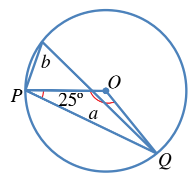
نظريةٌ

جميعُ الزوايا المحيطيةِ المرسومةِ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$

مثال 1

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قياسُ الزاويتيْنِ المشارِ إليْهِما بالحرفيْنِ a وَ b؟



المثلثُ OPQ مُتطابِقُ الضلعيْــنِ؛ لأنَّ $\overline{OQ}$ وَ $\overline{OP}$ نصفا قُطْريْنِ في الدائرةِ ومجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ هوَ $180°$. إذنْ:

$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180°$ نُعوِّضُ قياساتِ الزوايا المعلومةِ:

$a + 25° + 25° = 180°$ في المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ تتطابقُ زاويتا القاعدةِ

$a + 50° = 180°$ بالتبسيطِ

$a + 50° - 50° = 180° - 50°$ بطرحِ $50°$ منَ الطرفيْنِ

$a = 130°$

$b = 130° \div 2$ قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ نفسِهِ

$= 65°$

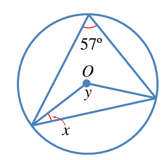
أَتذكَّرُ

زاويتا قاعدةِ المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْــنِ متســاويتانِ في القياسِ.

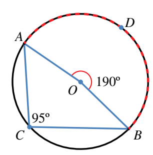
أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

$x = 33°\ ;\ y = 114°$



قــدْ يكونُ قيــاسُ الزاويــةِ المركزيةِ أكبــرَ منْ $180°$. ففي الشــكلِ المجاورِ، الزاويةُ AOB مُقابِلةٌ للقوسِ $\overset{\frown}{ADB}$، وقياسُــها $190°$، وهوَ ضعفُ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.



52

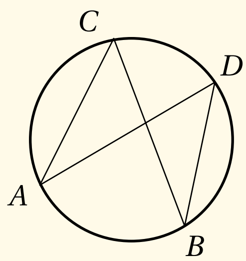
إرشادات للمعلم

- يمكن توجيــه الطلبة إلى تلوين الزوايا المحيطية المرســومة على القوس نفسه بألوان مختلفة، ثم قصها، ووضعها فوق بعضها؛ لمقارنة قياساتها، ثم تدوين ملاحظاتهم، وذلك لاستكشــاف نظرية الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه.
- اســتعمل برمجية جيوجبرا، وشجِّع الطلبة على اســتعمالها؛ لاستكشاف العلاقات بين الزوايا المحيطية والزوايا المركزية.

أخطاء مفاهيمية:

قــد يخطئ بعــض الطلبة في أثنــاء حلهم مســائل الزوايا المحيطيــة والزوايا المركزية؛ فلا ينتبهون إلى القوس المشــترك؛ لذا أكِّد لهــم ضرورة الانتباه إلى ذلك، وأن شــرط تطبيق هذه النظريات هو رســمها على القوس نفسه، أو على أقواس متساوية.

- اطلب إلى الطلبة رسم الشكل أدناه على دفاترهم، ثم قياس جميع الزوايا المحيطية المُبيَّنة في الشكل، ثم تدوين ملاحظاتهم عليها. سيلاحظ الطلبة أن الزوايا المحيطية المقابلة للقوس نفسه متطابقة.



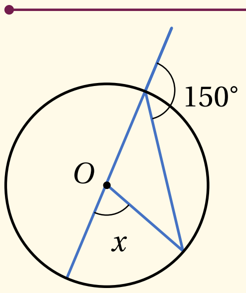
- بيِّن للطلبة أن هذا صحيــح دائمًا، وأنه يمثل موضوع نظريــة ثانية من نظريــات الدائرة (الزوايــا المحيطية المرسومة على القوس نفسه).

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الــذي يبين كيفية إيجاد زوايا في الدائرة اعتمادًا على نظريات الزوايا المحيطية، والزوايا المركزية، والعلاقات السابقة.

مثال إضافي

- مــا قيمة x في الشــكل المجــاور، علمًا بأن O هو مركز الدائرة؟ $60°$



التقويم التكويني:

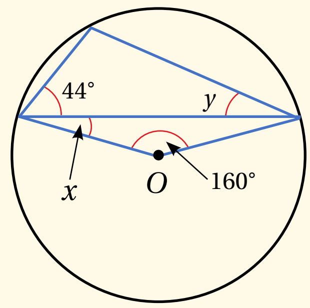
- اطلب إلــى الطلبة حل التدريب فــي بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات غير متجانسة).
- اختر بعض الإجابات التي تحــوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشــها على اللوح، ولا تذكر اســم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 2

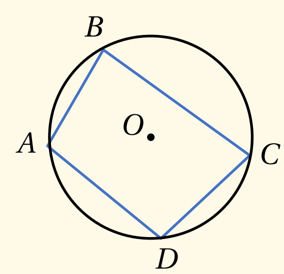
- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الـذي يبين العلاقة بين الزاوية المحيطية المشتركة في القوس مع زاوية مركزية منعكسة (أكبر من 180°).

مثال إضافي

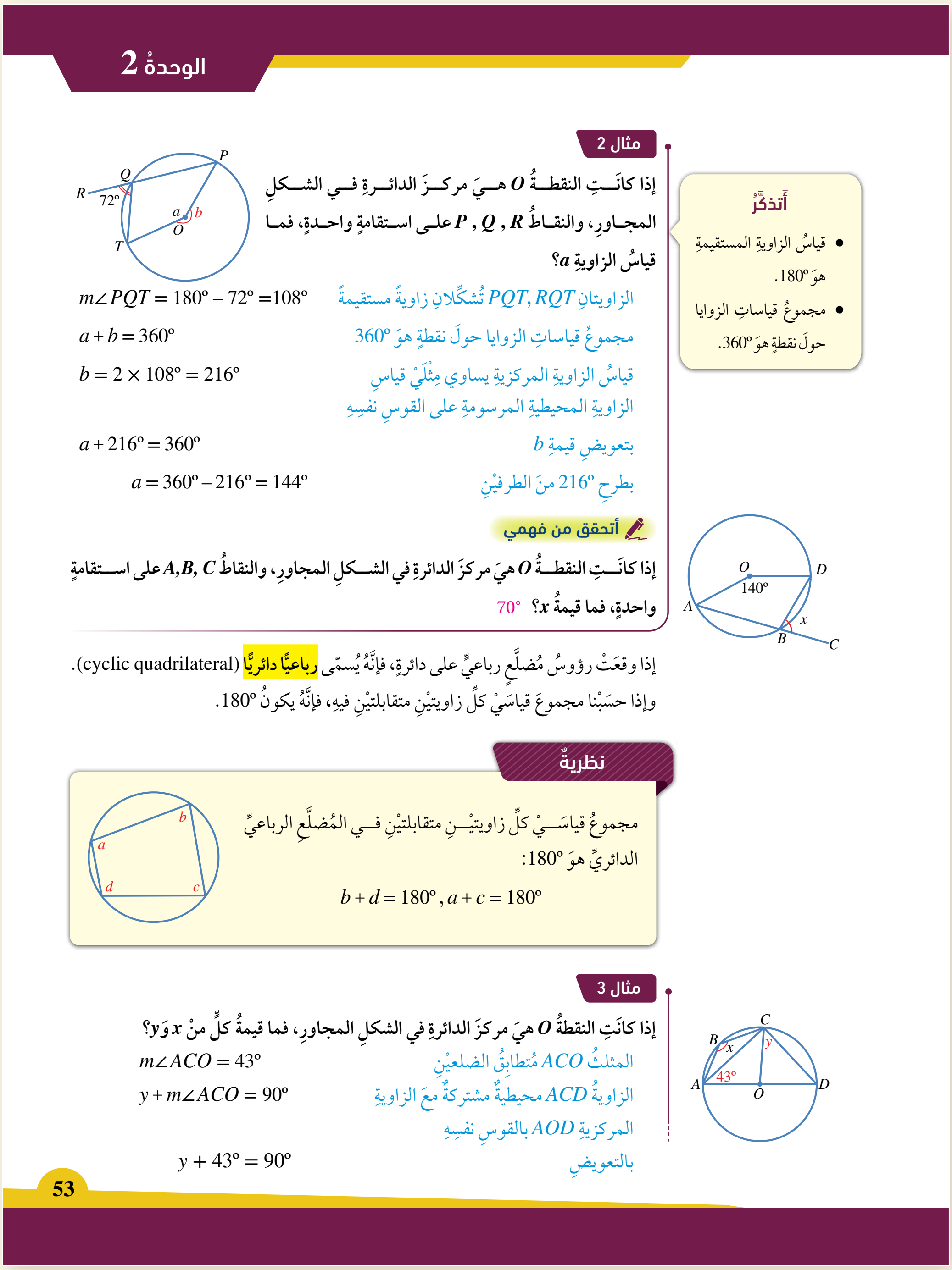
- ما قيمة كلٍّ من x، و y في الشكل أدناه، علمًا بأن O هو مركز الدائرة؟ $x = 10°\ ;\ y = 36°$



- اطلـب إلى الطلبة رسـم الشـكل المجـاور على دفاترهـم، علمًا بأن O هو مركـز الدائـرة. بيِّن لهم أن الشـكل الرباعي الذي تقع رؤوسـه على الدائرة يسمى مضلعًا رباعيًّا دائريًّا، وأن الزاويتين A، وC تسـميان زاويتين متقابلتين فيه. وكذلك الزاويتان B، و C؛ فهما متقابلتان.



- اطلب إلى الطلبة تلوين رؤوس الشكل الرباعي الأربعة بألوان مختلفة، ثم قـص الزاويتين A، و C، ثم وضع الرأسين بجانب بعضهما، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- اطلب إلى الطلبة تكرار الخطوة السـابقة للرأسين B، و D، ثم تدوين ملاحظاتهم.
- اسأل الطلبة:
  » ما العلاقة بين قياسـي الزاويتيـن المتقابلتين في الشـكل الرباعي الدائري؟ لماذا؟ مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين يساوي 180°
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أخرى؟
  » اذكرها.
  » اكتب نص النظرية على اللوح.



الوحدةُ 2

مثال 2

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ P , Q , R على استقامةٍ واحدةٍ، فما قياسُ الزاويةِ a؟

الزاويتانِ PQT, RQT تُشكِّلانِ زاويةً مستقيمةً	$m\angle PQT = 180° - 72° = 108°$
مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ 360°	$a + b = 360°$
قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ	$b = 2 \times 108° = 216°$
بتعويضِ قيمةِ b	$a + 216° = 360°$
بطرحِ 216° منَ الطرفيْنِ	$a = 360° - 216° = 144°$

أَتذكَّرُ

- قياسُ الزاويةِ المستقيمةِ هوَ 180°.
- مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ 360°.

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A,B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟ 70°

إذا وقعَتْ رؤوسُ مُضلَّعٍ رباعيٍّ على دائرةٍ، فإنَّهُ يُسمّى **رباعيًّا دائريًّا** (cyclic quadrilateral). وإذا حسَبْنا مجموعَ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ، فإنَّهُ يكونُ 180°.

نظريةٌ

مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ 180°:

$$b + d = 180°\ ,\ a + c = 180°$$

مثال 3

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

المثلثُ ACO مُتطابِقُ الضلعيْنِ	$m\angle ACO = 43°$
الزاويةُ ACD محيطيةٌ مشتركةٌ معَ الزاويةِ المركزيةِ AOD بالقوسِ نفسِهِ	$y + m\angle ACO = 90°$
بالتعويضِ	$y + 43° = 90°$

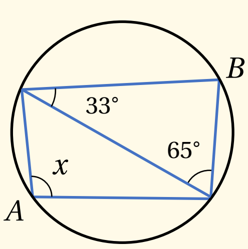
53

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية إيجاد زوايا في الدائرة ضمن مضلع رباعي دائري.
- وجِّـه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3) ضمن مجموعات ثنائية، وقدِّم التغذية الراجعة.

مثال إضافي

- ما قيمة x في الشكل الآتي؟ 98°



بطرحِ 43° منَ الطرفيْنِ $y = 90° - 43°$

$= 47°$

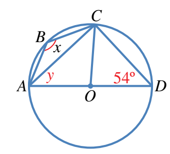
الشكلُ $ABCD$ رباعيٌّ دائريٌّ $x + m\angle ADC = 180°$

المثلثُ OCD مُتطابِقُ الضلعيْنِ $m\angle ADC = y = 47°$

بتعويضِ قيمةِ y $x + 47° = 180°$

بطرحِ 47° منَ الطرفيْنِ $x = 180° - 47°$

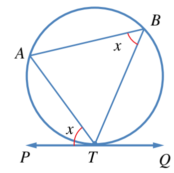
$= 133°$



أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

$x = 126°\ ;\ y = 36°$



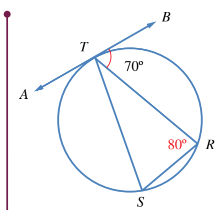
في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PQ}$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ عندَ النقطةِ T، وَ $\overline{TA}$ هوَ وترٌ للدائرةِ. تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ المماسِّ والوترِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ **الزاويةَ المماسِّيةَ** (angle between a tangent and a chord). وهذهِ الزاويةُ تحصرُ القوسَ $\overset{\frown}{TA}$ ، ويُمكِنُ ملاحظةُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المماسِّيةِ PTA يساوي قياسَ الزاويةِ ABT المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ $\overset{\frown}{TA}$ نفسِهِ.

نظريةٌ

قياسُ الزاويةِ المماسِّيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ ATS وَ TSR.

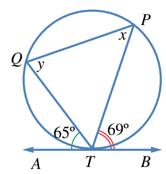
زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ $m\angle ATS = m\angle TRS = 80°$

زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ $m\angle TSR = m\angle BTR = 70°$

أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T.

أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، وَ TPQ، وَ QTP.



$m\angle TPQ = 65°$
$m\angle TQP = 69°$
$m\angle QTP = 56°$

تنويع التعليم:

اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى فوق المتوسط إثبات أن مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°.

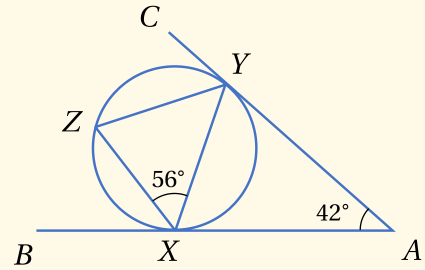
- ارسم على اللوح دائرة، ثم ارسم مماسًّا لها، ووترًا فيها يمر بنقطة التماس، مُبيِّنًا للطلبة أن الزاوية المحصورة بين المماس والوتر تسمى زاوية مماسية.
- ارسم زاوية محيطية تقابل القوس المقابل للزاوية المماسية، ثم اطلب إلى الطلبة التحقُّق من أن لهاتين الزاويتين القياس نفسه.
- وزِّع على الطلبة نسخًا من **ورقة المصادر 1** في الملحق، ثم اطلب إليهم تحديد الزاوية المحيطية المشتركة مع الزاوية المماسية في القوس نفسه، والتحقُّق من تساوي قياسيهما، وكتابة الحرف نفسه على الزوايا المتطابقة.
- تابع الطلبة في أثناء أدائهم المهمة المطلوبة، ولا سيما ما يتعلَّق منها بالشكل الثالث، وتأكَّد أنه كُتِب على إحدى الزاويتين الحرف p ، وكُتِب على الأخرى الحرف q ، ثم اسألهم:
  - » كيف يُثبِت الشكل الثالث أن مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري هو 180°؟ p ، و q هما قياسا زاويتين متجاورتين تُكوِّنان زاوية مستقيمة.

مثال 4

- ناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يبين كيفية إيجاد قياس زوايا في الدائرة اعتمادًا على نظرية الزاوية المماسية.

مثال إضافي

- $\overrightarrow{AB}$ ، و $\overrightarrow{AC}$ مماسان لدائرة في النقطتين X، و Y . أجد قياس الزاوية XYZ، مبررًا إجابتي.



$$m\angle YXA = \frac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69^\circ$$

(المثلث AXY متطابق الضلعين؛ لأن $AX = AY$).

$$m\angle ZXB = 180^\circ - (69^\circ + 56^\circ) = 55^\circ$$

(AXB خط مستقيم).

$$m\angle XYZ = m\angle ZXB = 55^\circ$$

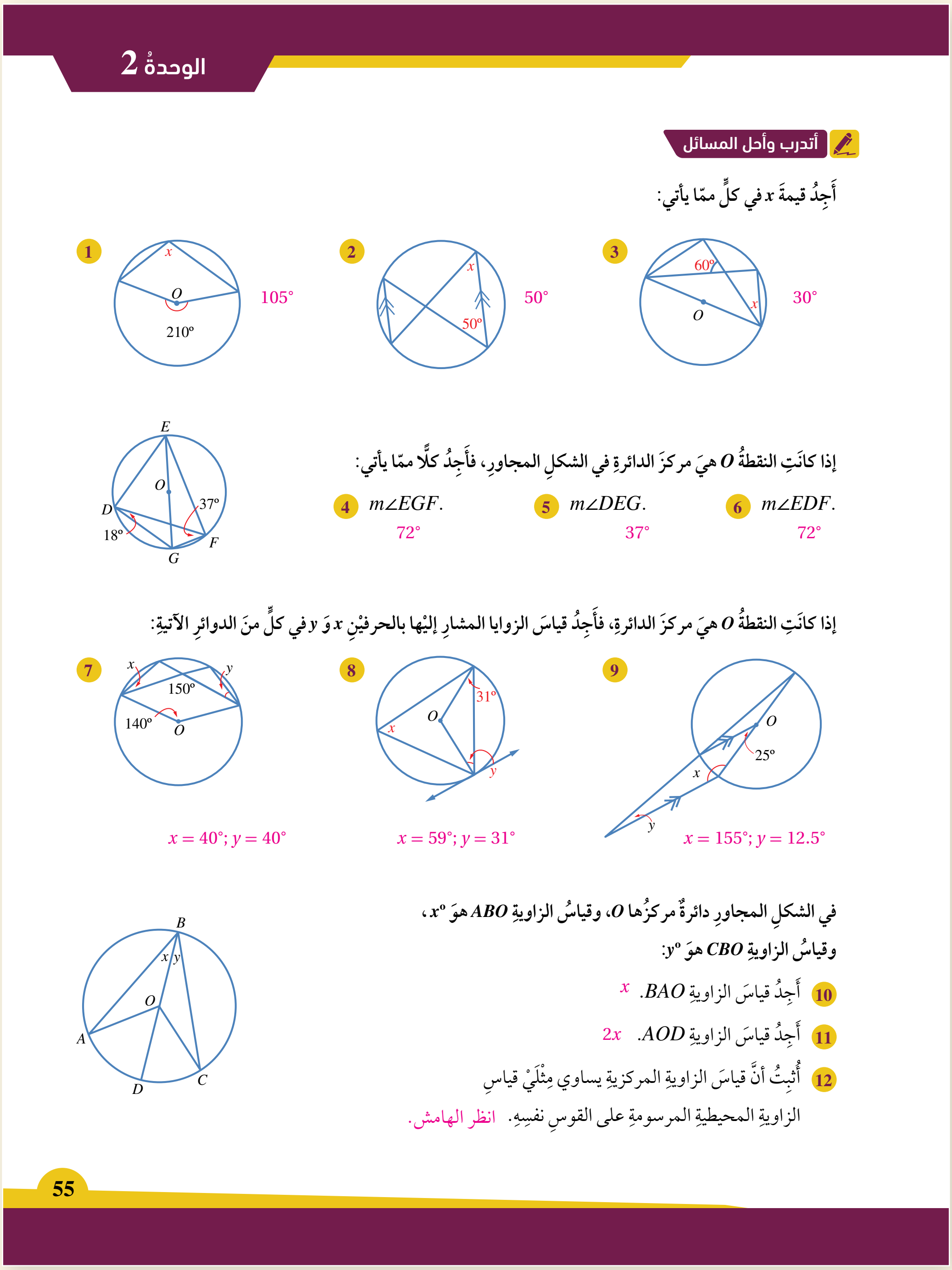
(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان في القوس نفسه).

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل المسائل فيها.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّــر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّن الطلبــة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلــب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.



أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

1 105°
2 50°
3 30°

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

4 $m\angle EGF.$ 72°
5 $m\angle DEG.$ 37°
6 $m\angle EDF.$ 72°

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7 $x = 40^\circ; y = 40^\circ$
8 $x = 59^\circ; y = 31^\circ$
9 $x = 155^\circ; y = 12.5^\circ$

في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ x°، وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ y°:

10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO. x
11 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD. $2x$
12 أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ. انظر الهامش.

55

إرشاد:

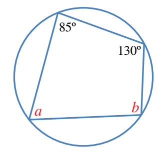
قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل مســائل تتعلق بالزوايا في الدائرة، وبخاصة عندما يكــون المطلوب إيجاد أكثر من زاوية واحدة في الشــكل؛ لذا وجِّههم إلى كتابة جميع الزوايا التي يعرفونها على الشكل قبل البدء بالحل.

إجابات:

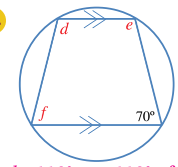
12) $m\angle AOC = m\angle AOD + m\angle DOC$

$$= 2x + 2y$$
$$= 2(x + y)$$
$$= 2\, m\angle AOB$$

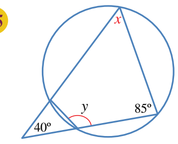
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13 

$a = 50°; b = 95°$

14 

$d = 110°; e = 110°, f = 70°$

15 

$x = 55°; y = 125°$

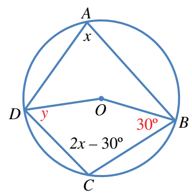
في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$، قياسُ الزاويةِ ROQ هوَ 38°، حيثُ O مركزُ الدائرةِ، وَPOT قُطْرٌ فيها يوازي QR. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

16 ROT. $71°$

17 QRT. $125.5°$

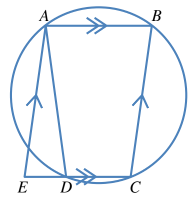
18 QPT. $54.5°$

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O:



19 لماذا $3x - 30° = 180°$؟ انظر الهامش.

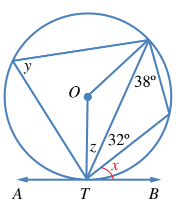
20 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي. انظر الهامش.



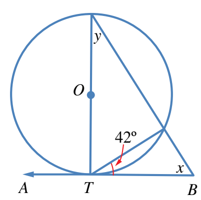
21 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَ أضلاعٍ. أُبيِّنُ أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

انظر ملحق الإجابات.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

22 

$x = 38°; y = 70°; z = 20°$

23 

$x = 48°; y = 42°$

إجابات:

19) الزاويتان A، و C متقابلتان في مضلع رباعي دائري، ومجموع قياسيهما 180°، إذن:

$$x + (2x - 30°) = 180°$$
$$3x - 30° = 180°$$

20) $3x = 210°$

$$x = 70°$$

$$m\angle DCB = 140° - 30° = 110°, m\angle DOB = 2 \times 70° = 140°$$

بما أن مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي هو 360°، فإن:

$y = 360° - 280° = 80°$ $\qquad 110° + 140° + 30° + y = 360°$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في صفحة الدرس من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل أسئلة مهارات التفكير العليا، ثم عرض حلها أمام أفراد المجموعات الأخرى لمناقشته.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

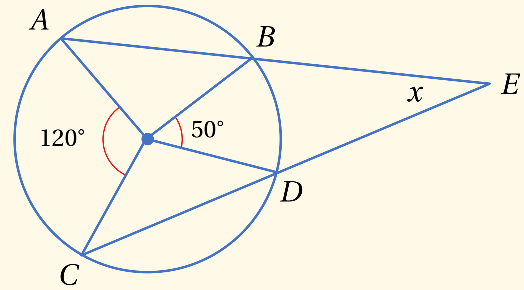
إرشادات للمعلم

- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة ذوات الأرقام من 1 إلى 6، وتابِعهم بعد الانتهاء من حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (7–12)، والأسئلة (1–6) في الصفحة 14 من كتاب التمارين بوصفها واجبًا منزليًّا. وفي اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.
- بعد الانتهاء من حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 4)، اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة ذوات الأرقام الفردية من 13 إلى 25، وتابِعهم في هذه الأثناء، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 16 إلى 26، والأسئلة (7 – 10) في الصفحة 14 من كتاب التمارين بوصفها واجبًا منزليًّا.

5 الإثراء

- إذا كانت O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فأجد قيمة x، مُبيِّنًا خطوات الحل. $35°$

(**إرشاد:** ارسم الوتر $\overline{BC}$).



- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إثبات أن قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.
- اطلب إلى الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط استكشاف نظرية الزاوية المماسية؛ بتلوين الزوايا المعنية، ثم قصها، ثم وضعها فوق بعضها، ثم تدوين استنتاجهم.

تعليمات المشروع:

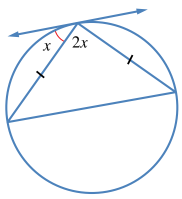
- اطلب إلى الطلبة الذين تناول نموذجهم أضلاعًا أو زوايا في الدائرة تنفيذ الخطوة الثالثة من المشروع، واستعمال برمجية جيوجبرا لرسم النموذج في جهاز الحاسوب، وإيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة إكمالهم التقرير الذي بدؤوا إعداده، وتضمينه تفسيرًا للخصيصة التي يتمتع بها نموذجهم.
- وجِّه الطلبة الى الاستعانة بمعلِّم الحاسوب، أو قيِّم المختبر، أو أحد الزملاء الذين يمتلكون مهارات حاسوبية في حال واجهتهم مشكلة ما في استعمال الجهاز أو البرمجية.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا قائمة تحوي جميع النظريات التي درسوها في هذه الوحدة، وأن يُميِّز كلٌّ منهم أكثر نظرية أتقن حل أسئلتها بلون مميز. وكذلك تمييز النظرية التي واجه صعوبة في إتقان حلها بلون أحمر، فضلًا عن ذكر مقترحاته بخصوص كيفية مواجهة هذا التحدي؛ **ما يُعزِّز لديهم مهارات إدارة الذات وحل المشكلات.**

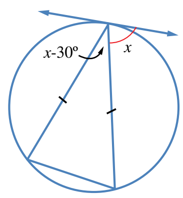
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ مِنَ الشكليْنِ الآتييْنِ:

24



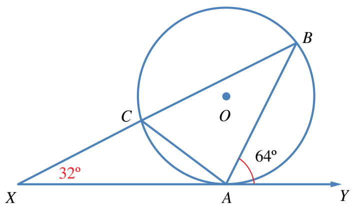
$45°$

25



$70°$

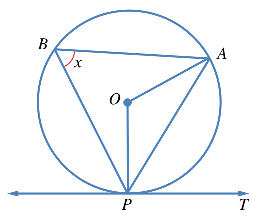
26 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّا للدائرةِ عندَ A. إذا كانَتِ النقاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على استقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابِقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات.



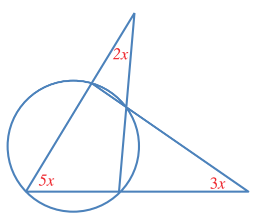
مهارات التفكير العليا

27 **تبرير:** قالَتْ فاتنُ إنَّ الزاويةَ المحيطيةَ المرسومةَ على قُطرِ الدائرةِ زاويةٌ قائمةٌ. هلْ قولُ فاتنَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش.

28 **تبرير:** في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ $x°$، فأُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يساوي قياسَ الزاويةِ ABP، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ. انظر ملحق الإجابات.



29 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ. انظر ملحق الإجابات.



المفاهيم العابرة:

أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي أسئلة البرهان الرياضي جميعها، والتبرير تحديدًا ضمن السؤالين 26، 28، وجِّه الطلبة إلى اتباع الخطوات المنطقية المتسلسلة في أثناء البرهان، وكتابة تبريراتهم لكل خطوة، وكيفية حصولهم على الإجابة، ما يُعزِّز لديهم المهارات الحياتية، ومهارات التفكير، مثل: التحليل والربط والتفسير، وتقديم الأدلة والبراهين.

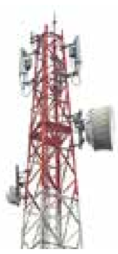
إرشاد: في السؤال 29، ذكِّر الطلبة بنظرية الزاوية الخارجية للمثلث التي تنص على أن قياس الزاوية الخارجية في المثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

إجابة:

27) نعم، هي على صواب؛ لأن الزاوية المقابلة لقطر الدائرة تشترك في القوس مع زاوية مركزية مستقيمة قياسها $180°$ ؛ لذا يكون قياسها نصف $180°$ ؛ أي $90°$.

الدرس 4

معادلةُ الدائرةِ
Equation of a Circle

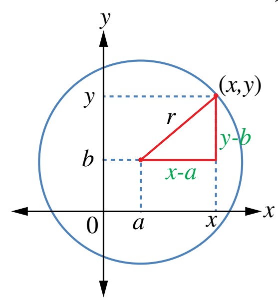


فكرةُ الدرسِ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادُ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.

المصطلحاتُ معادلةُ الدائرةِ، الصورةُ القياسيةُ، الصورةُ العامةُ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ النقطةُ $(7, 4)$ موقعَ محطةِ إذاعةٍ يُلتقَطُ بثُّها في دائرةٍ نصفُ قُطْرِها 224 km. إذا كانَ فوّازٌ يقيمُ في بيتٍ تُمثِّلُهُ النقطةُ $(-75, 95)$ على مستوًى إحداثيٍّ وحدتُهُ 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةَ إنْ كانَ بثُّ هذهِ الإذاعةِ يصلُ بيتَهُ أمْ لا؟

معادلةُ الدائرةِ (equation of the circle) هيَ العلاقةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ x والإحداثيِّ y لكلِّ نقطةٍ واقعةٍ على الدائرةِ. فإذا عُوِّضَ إحداثيا نقطةٍ في المعادلةِ، وكانَتِ النتيجةُ عبارةً صحيحةً، فهذا يعني أنَّ تلكَ النقطةَ تقعُ على الدائرةِ.



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r. والنقطةُ (x, y) تقعُ على الدائرةِ. ألاحِظُ أنَّهُ يُمكِنُ تكوينُ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي طولُ ضلعِهِ الأفقيِّ $(x-a)$، وطولُ ضلعِهِ الرأسيِّ $(y-b)$، وطولُ وترِهِ r. وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس تنتجُ المعادلةُ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ التي تُسمّى **الصورةَ القياسيةَ** (standard form) لمعادلةِ الدائرةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

1. الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
2. معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $(0, 0)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ:
$$x^2+y^2=r^2$$

58

2 الاستكشاف

- وجّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » ماذا تمثل النقطة $(7, 4)$ في هذه المسألة؟ موقع المحطة، ومركز الدائرة التي يصلها البث.
  - » مـاذا تمثل النقاط التي يصلها بث هذه المحطة الإذاعية؟ النقاط الواقعة على الدائرة، والنقاط الواقعة داخل الدائرة.
  - » كيف تعرف إن كانت نقطة ما واقعة على الدائرة، أو داخلها، أو خارجها؟ بإيجاد بُعْدها عن مركز الدائرة، ومقارنتها بطول نصف قطر الدائرة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

الدرس 4

نتاجات الدرس

- يجد معادلة الدائرة بالصورة القياسية.
- يجد معادلة الدائرة بالصورة العامة.
- يجد مركز الدائرة ونصف قطرها إذا أُعطِيت معادلتها.
- يجد طول القطعة المماسية من نقطة خارجية إلى نقطة التماس على دائرة علمت معادلتها.

التعلم القبلي:

- التطبيق على نظرية فيثاغورس.
- تعيين النقاط في المستوى الإحداثي.
- حساب المسافة بين نقطتين في المستوى.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بنظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين.
- اطلب إلى الطلبة تعيين النقاط الآتية في المستوى الإحداثي: $A(-1, 4), B(3,6), C(0, 12)$، ثم إيجاد الأطوال:
  - » AB, AC, BC، وتحديد نوع المثلث ABC مع بيان السبب. المثلث قائم الزاوية في B لأنه يحقق نظرية فيثاغورس.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد إحداثيي نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. $(-0.5, 8), (1, 5)$
- اكتب المعادلة الآتية: $x^2+y^2=9$، ثم اسأل الطلبة:
  - » ماذا تعرفون عن هذه المعادلة؟
  - » هل رأيتم مثلها سابقًا؟
- استمع لإجابات أكبر عدد منهم، ثـم أخبرهم أنهم سيتعرفون مثل هذه المعادلات في هذا الدرس.

3 التدريس

- ذكِّر الطلبة بمعادلة الخط المستقيم، ثم بيِّن لهم أن مفهوم معادلة أي منحنى في المستوى الإحداثي يعني وجود علاقة تربط إحداثيي النقاط الواقعة عليه.
- وضِّح للطلبة أنه يمكن إيجاد معادلة الدائرة بفرض نقطة $P(x, y)$ على محيطها، وإيجاد العلاقة التي تربط بين x و y برسم مثلث قائم الزاوية، أحد رؤوسه النقطة P، والرأس الآخر مركز الدائرة، ثم تطبيق نظرية فيثاغورس عليه، أو استعمال قانون المسافة بين نقطتين.
- ناقِش الطلبة في طريقة التوصُّل إلى الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة، ثم اذكر أمثلة بسيطة عليها، مُبيِّنًا كيف يمكن إيجاد إحداثيي المركز وطول نصف القطر لدائرة أُعطِيت معادلتها بالصورة القياسية:
- اكتب المعادلة: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما إحداثيا مركز هذه الدائرة؟ $(2, 3)$.
  - » ما طول نصف قطرها؟ 5 وحدات طول.
  - » أي النقاط تقع على هذه الدائرة: $A(-2, 6)$، $B(5, -2)$، أم $C(-1, 7)$؟ النقطتان A و C تقعان عليها.
  - » إذا كان الإحداثي x لنقطة واقعة على هذه الدائرة هو 6، فماذا يكون الإحداثي y لها؟ $y = 0$، أو $y = 6$

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يبين كيفية كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية إذا عُلِم مركزها وطول نصف قطرها.

مثال إضافي

- اكتب معادلة دائرة مركزها $(4, -2)$ وطول قطرها $\sqrt{52}$ وحدة. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 13$

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

مثال 1

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1) المركزُ هوَ النقطةُ $(-2, 7)$، وطولُ نصفِ القُطرِ 6 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(a, b) = (-2, 7), r = 6 \quad (x-(-2))^2 + (y-7)^2 = 6^2$

$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 36$

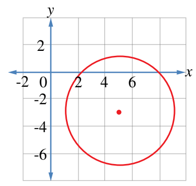
2) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ القُطرِ 5 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $\quad x^2 + y^2 = r^2$

بتعويضِ $r = 5 \quad x^2 + y^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 = 25$

3) الدائرةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



عندَ النظرِ إلى الدائرةِ يَتبيَّنُ أنَّ مركزَها النقطةُ $(5, -3)$، وأنَّ طولَ نصفِ قُطرِها 4 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(a, b) = (5, -3), r = 4 \quad (x-5)^2 + (y-(-3))^2 = 4^2$

$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$

أتحقق من فهمي

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ: انظر الهامش.

a) المركزُ هوَ النقطةُ $(0, 4)$، وطولُ نصفِ القُطرِ 9 وحداتٍ.

b) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ القُطرِ 8 وحداتٍ.

إذا عُلِمَ مركزُ الدائرةِ ونقطةٌ واقعةٌ عليْها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِ نصفِ القُطرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ.

مراجعة المفهوم

إذا كانَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$، هوَ d فإنَّ:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 1):

a) $x^2 + (y-4)^2 = 81$

b) $x^2 + y^2 = 16$

مثال 2

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 4)$.

أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ:

قانونُ المسافةِ بينَ نقطتينِ	$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
بالتعويضِ	$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2$
بالتبسيطِ	$= 144 + 81$
	$= 225$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ	$r = \sqrt{225} = 15$

والآنَ، أُعوِّضُ إحداثيَّي المركزِ وقيمةَ r^2 في الصورةِ القياسيةِ لمعادلةِ الدائرةِ، فأَجِدُ أنَّ معادلةَ هذهِ الدائرةِ هيَ:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225.$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(4, -3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(2, 0)$. انظر الهامش.

إذا علمْنا معادلةَ دائرةٍ بالصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، فإنَّهُ يُمكِنُ فكُّ الأقواسِ وإعادةُ الترتيبِ، فتنتجُ المعادلةُ: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

يُمكِنُ أيضًا كتابةُ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ الآتيةِ:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيثُ: $f = -a$, $g = -b$, $c = a^2 + b^2 - r^2$، وهيَ تُسمّى **الصورةَ العامةَ** (general form) لمعادلةِ الدائرةِ.

إذا علمْنا الصورةَ العامةَ لمعادلةِ أيِّ دائرةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحويلُها إلى الصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، وذلكَ بإكمالِ المربَّعِ.

مراجعةُ المفهومِ

لإكمالِ المربَّعِ للحدَّيْنِ $x^2 + ax$، يضافُ $\left(\frac{a}{2}\right)^2$، ثمَّ يُطرَحُ، فينتجُ مربَّعٌ كاملٌ هوَ $(x + \frac{a}{2})^2$ وبذلكَ يتحوَّلُ $x^2 + ax$ إلى $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

أخطاء مفاهيمية:

قد يُعوِّض بعض الطلبة الطول المعطى في السؤال بدل نصف قطر الدائرة في المعادلة من دون انتباه إلى أن المعطى طول قطر، أو نصف قطر؛ لذا نبِّههم على التحقُّق من الطول المعطى، فإن كان قطرًا وجب عليهم قسمته على 2؛ لينتج نصف القطر الذي يجب تعويضه في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يبين كيفية كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية إذا عُلِم مركزها ونقطة واقعة عليها.

مثال إضافي

- اكتب معادلة دائرة مركزها $(-1, 3)$، وتمر بالنقطة $(-4, 6)$. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$

- ناقِش الطلبة في عملية تحويل معادلة الدائرة من الصورة القياسية إلى الصورة العامة.
- اكتب معادلة دائرة بالصورة القياسية، مثل: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$، ثم اطلب إلى الطلبة تحويلها إلى الصورة العامة.
- ذكِّر الطلبة بضرورة إكمال المربع، مُبيِّنًا لهم طريقة تحويل معادلة دائرة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بإكمال المربع عن طريق المثال الآتي:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 13$

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية الانتقال من الصورة العامة إلى الصورة القياسية، وإيجاد إحداثيي مركز الدائرة، وطول نصف قطرها من معادلتها.

مثال إضافي

- حوِّل معادلة الدائرة: $3x^2+3y^2-12x+18y-12=0$ إلى الصورة القياسية، ثم اكتب إحداثيي مركزها، وطول نصف قطرها.

$(x-2)^2+(y+3)^2=17;\ (2,-3)\ ;\ r=\sqrt{17}$

إرشاد: نبِّه الطلبة إلى ضرورة قسمة طرفي المعادلة على معامل x^2 (الذي يكون مطابقًا لمعامل y^2 في معادلة الدائرة) إن لم يكن 1، قبل إكمال المربع.

مثال 3

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2+y^2-8x+6y-56=0$.

بإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي x ينتجُ: $x^2-8x=(x-4)^2-16$ ، وبإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي y ينتجُ: $y^2+6y=(y+3)^2-9$.

وبذلكَ يُمكِنُ تحويلُ المعادلةِ $x^2+y^2-8x+6y-56=0$ إلى:

$$(x-4)^2-16+(y+3)^2-9-56=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2=81.$$

بمقارنةِ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$، نجدُ أنَّ:

$$a=4\ ,\ b=-3,\ r=9 .$$

إذنْ، مركزُ هذهِ الدائرةِ هوَ النقطةُ $(4,-3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 9 وحداتٍ.

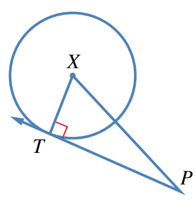
أتحقق من فهمي انظر الهامش.

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2+y^2+2x-10y-10=0$.

تعلَّمْتُ في درسٍ سابقٍ أنَّ مماسَّ الدائرةِ يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وأنَّهُ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ. وهذا يفيدُ في التحقُّقِ منْ أنَّ مستقيمًا معطًى هوُ مماسٌّ لدائرةٍ معطاةٍ، وحسابِ طولِ قطعةٍ مماسِّيةٍ كما في المثاليْنِ الآتييْنِ.

مثال 4

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P\ (6,-6)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x+5)^2+(y-4)^2=25$.



أَرسمُ مُخطَّطًا، ولتكنِ النقطةُ X مركزَ الدائرةِ، وَ T نقطةَ التَّماسِّ.

لحسابِ طولِ المماسِّ $\overline{PT}$، ثُم أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ القائمِ XTP، الذي يُمكِنُ إيجادُ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ، هما: نصفُ القُطْرِ $\overline{XT}$، والوترُ $\overline{XP}$.

طولُ نصفِ القُطْرِ XT هوَ 5. ولحسابِ XP، أَجِدُ المسافةَ بينَ مركزِ الدائرةِ $X\ (-5,4)$ والنقطةِ $P\ (6,-6)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$$(XP)^2=(6-(-5))^2+(-6-4)^2=(11)^2+(-10)^2=221.$$

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس على المثلثِ XTP :

$$(PT)^2=(XP)^2-(XT)^2 \qquad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن مركز الدائرة $(x+6)^2+(y-2)^2=17$ هو $(6\ ,-2)$؛ لذا نبِّههم إلى أن 6 تساوي $-a$، وأن -2 تساوي $-b$ في الصورة القياسية.

وبذلك، فإن: $a=-6, b=2$، أو تحويلها إلى:

$(x-(-6))^2+(y-2)^2=17$ ، ومقارنتها بـ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

حيث يسهل استنتاج قيمة كلٍّ من a، و b، و r

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

$(-1,5);\ r=6$

بالتعويضِ $= 221 - 25$

بالتبسيطِ $= 196$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $PT = \sqrt{196} = 14$

إذنْ، طولُ المماسِّ 14 وحدةً.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P(7, 4)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$. 7 وحدات.

مثال 5

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 2x + 3$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$.

أَحُلُّ النظامَ المُكوَّنُ منَ المعادلتيْنِ: $y = 2x + 3$، وَ $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$؛ لإيجادِ عددِ نقاطِ تقاطعِ المستقيمِ والدائرةِ. فإذا كانَ عددُ نقاطِ التقاطعِ واحدًا فقطْ، فإنَّ المستقيمَ يكونُ مماسًّا للدائرةِ.

بتعويضِ $y = 2x + 3$ في معادلةِ الدائرةِ $(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$

بالتبسيطِ $(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$

بفكِّ الأقواسِ $x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، وجعلِ الطرفِ الأيمنِ صفرًا $5x^2 - 40x + 80 = 0$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 5 $x^2 - 8x + 16 = 0$

بالتحليلِ $(x - 4)^2 = 0$

$x = 4$

بتعويضِ قيمةِ x في إحدى المعادلتيْنِ لإيجادِ قيمةِ y $y = 2(4) + 3 = 11$

بما أنَّ هذا المستقيمَ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ هيَ $(4, 11)$، فإنَّهُ مماسٌّ للدائرةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$. انظر الهامش.

62

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 5):

بتعويض $y = 4x - 5$ في المعادلة: $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$، تنتج المعادلة: $17x^2 - 102x + 153 = 0$ وبقسمة هذه المعادلة على 17، تنتج المعادلة:

$x^2 - 6x + 9 = 0$ التي لها حل واحد، هو: $x = 3$ وبتعويض القيمة $x = 3$ في المعادلة $y = 4x - 5$، فإن: $y = 7$ إذن: هذا المستقيم هو مماس للدائرة؛ لأنه يتقاطع معها في نقطة واحدة فقط، هي: $(3, 7)$.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة تحديد الشكل الذي تمثله المعادلات الآتية:
  - « $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 10 = 0$ دائرة
  - « $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$ نقطة
  - « $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$ لا شيء
- اطلب إليهم ذكر الشرط الذي يجعل المعادلة: $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ تمثل دائرة. $f^2 + g^2 - c > 0$

مثال 4

- ذكِّر الطلبة بخصائص مماس الدائرة، ثم ناقِشهم في حل المثال 4 الذي يبين كيفية حساب طول القطعة المماسية إذا عُلِمت معادلة الدائرة والنقطة التي رُسِم منها المماس.

مثال إضافي

- أجد طول القطعة المماسية المرسومة من النقطة $(1, 16)$ إلى نقطة التماس على دائرة معادلتها: $x^2 + y^2 - 16x + 2y = 39$ 15.3 وحدة تقريبًا.

مثال 5

- ناقِش الطلبة في حل المثال 5 الذي يبين طريقة الحكم على أن مستقيمًا معلومًا هو مماس لدائرة أم لا.

مثال إضافي

- هل المستقيم $x - 7y + 12 = 0$ مماس للدائرة التي معادلتها: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$؟ أبرِّر إجابتي. هذا المستقيم ليس مماسًّا لهذه الدائرة؛ لأنه يتقاطع معها في نقطتين، هما: $(1, -5)$، و $(9, 3)$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة من 1 إلى 7 في الصف بعد حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3)، وتابِعهم في هذه الأثناء.
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة ذوات الأرقام الفردية من 8 إلى 17، وتابِعهم في هذه الأثناء، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأسئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثامنة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

أتدرب وأحل المسائل

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1. المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ. $x^2+y^2=49$
2. المركزُ هوَ النقطةُ $(-1, 3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 5 وحداتٍ. $(x+1)^2+(y-3)^2=25$
3. المركزُ هوَ النقطةُ $(-3, -2)$، وطولُ قُطْرِها 10 وحداتٍ. $(x+3)^2+(y+2)^2=25$

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

4. المركزُ $(-1, 2)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, 5)$. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$
5. المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ $(-9, -4)$. $x^2+y^2=97$

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

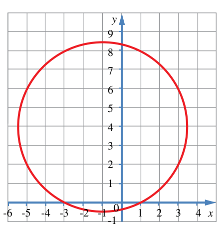
6. $(x+5)^2+(y-8)^2=36$ $r=6, (-5, 8)$
7. $(x-19)^2+(y-33)^2=400$ $r=20, (19, 33)$
8. $x^2+(y+4)^2=45$ $r=3\sqrt{5}, (0, -4)$
9. $(x-3)^2+(y+10)^2=28$ $r=2\sqrt{7}, (3, -10)$

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

10. $x^2+y^2-18x+14y=14$ $r=12, (9, -7)$
11. $x^2+y^2+8x=9$ $r=5, (-4, 0)$
12. $2x^2+2y^2+20x+36y+158=0$ $r=3\sqrt{3}, (-5, -9)$
13. $4x^2+4y^2+120x+855=24y$ $r\approx 13, (-15, 3)$

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ بالصورتيْنِ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$، حيثُ: f، وَg، وَc أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

14. المركزُ $(-11, -1)$، وطولُ القُطْرِ 26 وحدةً. انظر الهامش.
15. المركزُ $(3, 0)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ. انظر الهامش.
16. المركزُ $(-4, 7)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(1, 3)$. انظر الهامش.



17. أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ. انظر الهامش.
18. أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات.

إجابات:

14) $(x+11)^2+(y+1)^2=169$

$x^2+y^2+22x+2y-47=0$

15) $(x-3)^2+y^2=48$

$x^2+y^2-6x-39=0$

16) $(x+4)^2+(y-7)^2=41$

$x^2+y^2+8x-14y+24=0$

17) مركز هذه الدائرة هو $(-1, 4)$، ومن المُلاحَظ أنها تمر بالنقطة $(1, 0)$؛ لذا، فإن مربع طول نصف قطرها: $2^2+4^2=20$

إذن: معادلتها هي: $(x+1)^2+(y-4)^2=20$

أو: $x^2+y^2+2x-8y-3=0$

19 أجدُ إحداثيَّي المركزِ وطولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي معادلتُها: $(2x-4)^2 + (2y+6)^2 = 100$.
انظر ملحق الإجابات.

20 دائــرةٌ معادلتُها $x^2 + y^2 + px + 6y = 96$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحــدةً، وَ p عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ. انظر ملحق الإجابات.

21 ممــرٌّ: ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُــهُ، وهــوَ النقطةُ $(7, 3)$. إذا كانَــتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحــورَ y، والصغرى تمسُّ المحورَ x، فأَكتبُ معادلتَيِ الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشــكِّلانِ المحيــطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ. انظر ملحق الإجابات.

تُمثِّلُ النقطتانِ $D\ (2, 9)$، وَ $E\ (14, -7)$ نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها C:

22 أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ C. $C(8, 1)$

23 أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ. $r = 10$

24 أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ. $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 100$

25 أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 3x - 2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$. انظر ملحق الإجابات.

26 رُسِمَ مماسٌّ منَ النقطةِ $P\ (8, 5)$ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$. أَجِدُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ النقطةَ P بنقطةِ التَّماسِّ. $4\sqrt{3}$

مهارات التفكير العليا

27 **تبريرٌ:** قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 59 = 0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ. هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. قوله صحيح لأن $r^2 = a^2 + b^2 - c = 49 + 9 - 59 = -1$ وهي عدد غير حقيقي.

28 **تحدٍّ:** رُسِمَ منَ النقطةِ $A\ (8, 21)$ مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها C، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ D، وَ B. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 49$، فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟ انظر ملحق الإجابات.

29 **تحدٍّ:** أَكتبُ الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24 = 0$ منْ دونِ استعمالِ طريقةِ إكمالِ المربَّعِ. انظر ملحق الإجابات.

64

مسابقة (التحديات الثلاثة):

- أحضِر ثلاثة صناديق، ثم اكتب علــى الأول عبارة: (التحدي 1)، واكتب على الثاني عبارة: (التحدي 2)، واكتب على الثالث عبارة: (التحدي 3).
- ضع مجموعة من الأوراق في كل صندوق، كُتِب في كلٍّ منها ســؤال مناســب حسب الآتي:
  - **التحدي 1**: أسئلة مشابهة للمثال (1).
  - **التحدي 2**: أسئلة مشابهة للمثال (2).
  - **التحدي 3**: أسئلة مشابهة للمثال (3).
- ارمِ على أحد الطلبة كرة إسفنجية، ثم اطلب إليه سحب ورقة من أحد الصناديق الثلاثة، والإجابة عن السؤال، ويمكنك استعمال استراتيجية الرؤوس المرقمة لاختيار الطلبة.
- كرِّر الخطوة السابقة لأكثر من طالب.
- يمكن تشجيع الطلبة على المشــاركة بتقديم جوائز رمزية، أو وضع ملصقات جذابة على ورقة الإجابة، والطلب إليهم الاحتفاظ بها في ملف أعمالهم.

5 الإثراء

- جد مركز الدائرة التي تمر بالنقاط: $A(4, 0), B(-6, 0), C(0, 4)$، ثم اكتب معادلتها.
  المركز هو $(-1, -1)$، ومعادلة الدائرة هي: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 26$
- اطلب إلــى الطلبة اســتعمال برمجيــة جيوجبرا في المنزل لتحديــد أي المعادلات الآتيــة تمثل معادلة دائرة، ثم اطلب إلى الطلبة ذوي المســتوى المتوسط وفوق المتوسط بيان ذلك جبريًّا:
  - $x^2 + y^2 - 10x + 6y = -18$
  - $x^2 + y^2 - 18x + 14y + 14 = 0$
  - $3x^2 + 4y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$
  - $2x^2 + 2y^2 - 4x + 10y - 20 = 0$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الذين تناول نموذجهم معادلة الدائرة تنفيذ الخطوة الثالثة من المشروع، واستعمال برمجية جيوجبرا لرسم النموذج في جهاز الحاسوب، وإيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة إكمالهم التقرير الذي بدؤوا إعداده، وتضمينه تفسيرًا للخصيصة التي يتمتع بها نموذجهم.

6 الختام

- اطلــب إلــى الطلبــة شــرح طريقة إيجاد معادلة دائرة عُلِمــت إحداثيــات طرفــي قطــر فيهــا، ثــم اتباع تلك الطريقــة لإيجــاد معادلــة دائــرة تكــون النقطتــان: $A(5, -6)$، و $B(13, 10)$ طرفــي قطــر فيهــا.
  $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 80$

إرشادات للمعلم

لتشــجيع الطلبة من ذوي المســتوى دون المتوسط علــى المشــاركة، يمكن اختيــار طلبة مــن ذوي المستوى المتوســط، وفوق المتوسط للمشاركة في بداية المسابقة.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

نتاجات الدرس

- يستعمل برمجية جيوجبرا لاستكشاف العلاقة بين نصفي قطري الدائرتين، وموقع كلٍّ منهما بالنسبة إلى الأخرى.

التعلم القبلي:

- استعمال نظريات مماس الدائرة ومعادلتها.
- إيجاد الأطوال والقياسات لزوايا في أشكال رُسِمت باستعمال برمجية جيوجبرا.

1 التهيئة

- رافِق الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثلاثية على الأكثر، وغير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة فتح برمجية جيوجبرا من الموقع: https://www.geogebra.org/geometry في أجهزة الحاسوب.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة رسم دائرة طول نصف قطرها 3 وحدات، ثم رسم دائرة مركزها معلوم، وتمر بنقطة معلومة، ثم إيجاد طول نصف قطرها.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا.

2 الاستكشاف

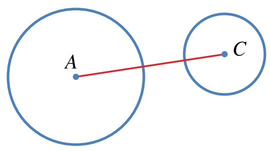
- وجه كل طالب إلى رسم دائرتين متباعدتين ودائرتين متماستين في دفتره.
- اطلب إلى أحد الطلبة رسم إجابته على اللوح، ثم اسأل زملاءه:
  » من لديه إجابة أخرى؟
  » ارسمها (يرسم أكثر من طالب إجابته على اللوح).
- وضِّح للطلبة الحالات الممكنة لدائرتين في مستوى.

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ الدوائرِ المتماسَّةِ
Exploring Tangent Circles

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra) لرسمِ دائرتيْنِ، أنصافُ أقطارِهِما مُحدَّدةٌ، وإيجادِ البُعْدِ بينَ مركزيهِما.

نشاط 1 أرسمُ الشكلَ الآتيَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أجِدُ AC.



الخطوةُ 1: أختارُ أيقونةَ Circle: Center & Radius منْ شريطِ الأدواتِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ زرَّ الفأرةِ الأيسرَ معَ السحبِ لرسمِ دائرةٍ مركزُها A. ستظهرُ معادلةُ الدائرةِ بالصورةِ القياسيةِ في شريطِ الإدخالِ، وسيظهرُ مركزُها على شكلِ زوجٍ مرتبٍ.

الخطوةُ 3: أُكرِّرُ الخطوتيْنِ (1) وَ(2) لرسمِ دائرةٍ مركزُها C، وإيجادِ نصفِ قُطرِها.

الخطوةُ 4: لأجِدَ البُعْدَ بينَ مركزِ كلٍّ منَ الدائرتيْنِ، أختارُ Segment منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على المركزِ A، ثمَّ المركزِ C، وأقرأُ البُعْدَ بينَ المركزيْنِ منْ شريطِ الإدخالِ.

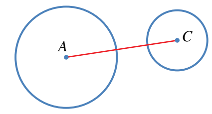
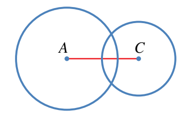
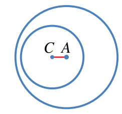
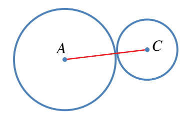
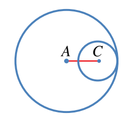
يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ العلاقةِ بينَ نصفَيْ قُطرَيِ الدائرتيْنِ، وموقعِ كلٍّ منْهُما بالنسبةِ إلى الأُخرى.

نشاط 2

1. أرسمُ كلًّا منَ الدوائرِ المُبيَّنةِ في الجدولِ الآتي باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
2. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ الكبيرةِ r_1، وطولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ الصغيرةِ r_2، فأستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لأُكمِلَ الجدولَ الآتيَ.

65

3 أُقارنُ بينَ قيمِ $r_1 + r_2$، $r_1 - r_2$، وَ AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

وضعُ الدائرتيْنِ	r_1	r_2	AC	$r_1 - r_2$	$r_1 + r_2$	الاستنتاجُ
						
						
						
						
						

أتدرب

أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ دونَ رسمِهِما:

1) $r_1 = 9,\ r_2 = 5\ , AC = 3$ واحدة داخل الأخرى.

2) $r_1 = 11,\ r_2 = 5\ , AC = 6$ متماستان من الداخل.

3) $r_1 = 6,\ r_2 = 3\ , AC = 17$ متباعدتان.

4) $r_1 = 8,\ r_2 = 5\ , AC = 3$ متماستان من الداخل.

66

3 التدريس

- وضِّـح للطلبة كيف يُنفَّذ النشـاط 1، ثم اطلب إليهم تنفيذه ضمن مجموعات، وتأكَّد أن أفراد كل مجموعة يمكنهم تنفيذ النشاط.
- اسأل الطلبة:
  - » بماذا توصَف هاتان الدائرتان؟ متباعدتان.
  - » ما علاقة المسـافة بين مركزيهمـا وطول نصفي قطريهما؟ المسافة بين مركزيهما أكبر من مجموع طولي نصفي قطريهما.
  - » إذا كان طولا نصفي قطري دائرتين 5 cm, 9 cm، وكانـت الدائرتان متماسـتين من الخـارج، فما المسافة بين مركزيهما؟ 14 cm
  - » إذا كان طولا نصفي قطري دائرتين 8 cm, 13 cm، وكانتا الدائرتان متماستين من الداخل، فما المسافة بين مركزيهما؟ 5 cm
  - » إذا كان طولا نصفي قطري دائرتين 7 cm, 15 cm، وكانتـا الدائرتـان متقاطعتيـن، فما المسـافة بين مركزيهما؟ أي عدد أكبر من 8، وأقل من 22
- وزِّع على الطلبة **ورقة المصادر 2**، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط 2، وملء الجدول باستعمال برمجية جيوجبرا.
- اسأل الطلبة عن علاقة المسافة بين المركزين وطولي نصفي القطرين في كل حالة.
- اطلب إلى الطلبة وصف أوضاع الدوائر في الحالات الخمس.

4 التدريب

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسـئلة من 1 إلى 4 في بند (أتدرب)، وتابِعهم في هذه الأثناء، والفت انتباههم إلى أنه يمكنهم التحقُّق من إجاباتهم باستعمال برمجية جيوجبرا.

5 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة كتابة تقرير عن استعمالات برمجية جيوجبرا في الهندسـة، وتوثيقها بالصور (اسـتعمل خاصية طباعة الشاشة).

6 الختام

- اسأل الطلبة:
  - » كيف يمكن تحديد وضع دائرتين في المسـتوى الإحداثي بالنسـبة إلى بعضهما من دون رسمهما؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكرها.

الدرس 5

نتاجات الدرس

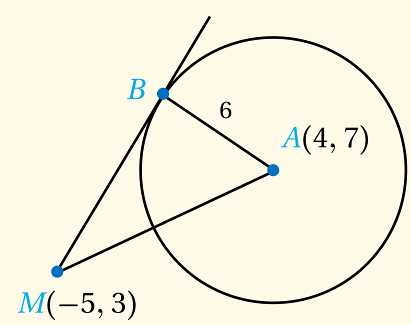
- يستنتج العلاقة بين دائرتين.
- يوظف علاقة المسافة بين المركزين، وطولي نصفي القطرين لدائرتين، وطول المماس المشترك لإيجاد أطوال مجهولة.

التعلم القبلي:

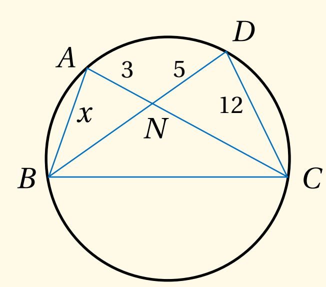
- معرفة مفهوم مماس الدائرة، وخصائص المماسات.
- حساب طول القطعة المماسية.
- توظيف تشابه المثلثات في حل مسائل رياضية.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بمماس الدائرة، وخصائص المماس والمماسين المرسومين من نقطة خارج الدائرة، ثم ارسم الشكل المجاور الذي يبين المماس $\overrightarrow{MB}$ لدائرة مركزها A، ثم اطلب إليهم إيجاد طول القطعة المماسية $\overline{MB}$، وتبرير خطوات الحل.



- اسأل الطلبة عن مفهوم تشابه مثلثين، وشروط ذلك.
- ارسم الشكل المجاور، ثم اسأل الطلبة:
  - » لماذا يكون المثلثان NCD، و NBA متشابهين؟
  - » ما قيمة x؟ 7.2



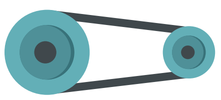
الدرس 5

الدوائرُ المتماسَّةُ
Tangent Circles

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ العلاقةِ بينَ دائرتيْنِ، وتعرُّفُ المماسّاتِ المشتركةِ، وتوظيفُ ذلكَ في حَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ الدائرتانِ المتماسَّتانِ، المماسُّ المشتركُ الخارجيُّ، المماسُّ المشتركُ الداخليُّ.

مسألةُ اليومِ يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالـي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

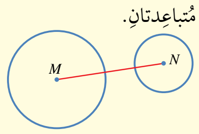


يُمكِنُ أنْ تتقاطعَ الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ في نقطةٍ واحدةٍ، أوْ نقطتيْنِ، وقدْ لا تتقاطعانِ أبدًا. وتُسمّى الدائرتانِ المُتقاطِعتانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ **دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ** (tangent circles).

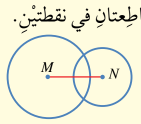
مفهومٌ أساسيٌّ

إذا رُسِمَتْ دائرتانِ في مستوًى واحدٍ، فإنَّ وضعَهُما بالنسبةِ إلى بعضِهِما ينحصرُ في الحالاتِ الآتيةِ:

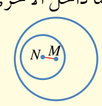
1. مُتباعِدتانِ.



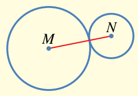
2. مُتقاطِعتانِ في نقطتيْنِ.



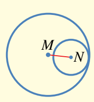
3. إحداهُما داخلَ الأُخرى.



4. مُشتركتانِ في نقطةٍ واحدةٍ؛ أيْ إنَّهما متماسَّتانِ. ولهذا الوضعِ صورتانِ:



متماسَّتانِ منَ الخارجِ.

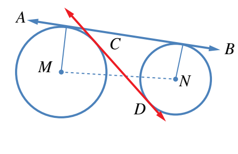


متماسَّتانِ منَ الداخلِ.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » أين يمكن أن تصادف مثل هذا الوضع؟ ستتنوع إجابات الطلبة.
  - » ما وضع الدائرتين اللتين تمثلان البكرتين؟ متباعدتان.
  - » ماذا يمثل جزء الحزام الممتد بين نقطتي التقائه مع البكرتين؟ يمثل مماسًّا لكلتا الدائرتين.
  - » كيف يمكن حساب المسافة بين مركزي البكرتين؟ باستعمال نظرية فيثاغورس؛ لوجود مثلثات قائمة.
- استمع إلى إجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

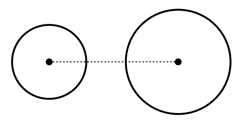
إذا كانَ المستقيمُ مماسًّا لكلٍّ منْ دائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **مماسًّا مشتركًا** (common tangent).
وإذا قطعَ المماسُّ المشتركُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الداخليَّ** (common internal tangent)، وإلّا فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الخارجيَّ** (common external tangent). ففي الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ مشتركٌ خارجيٌّ، وَ $\overleftrightarrow{CD}$ مماسٌّ مشتركٌ داخليٌّ.



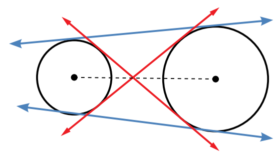
يُمكِنُ رسمُ مماسٍّ واحدٍ فقطْ للدائرةِ عندَ نقطةٍ عليْها، ويُمكِنُ أيضًا رسمُ مماسَّيْنِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، فما عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها للدائرتيْنِ؟ تعتمدُ إجابةُ هذا السؤالِ على وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

مثال 1

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.



أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، ثمَّ أرسمُ المماسّاتِ التي تقطعُها بلونٍ أحمرَ، والمماسّاتِ التي لا تقطعُها بلونٍ أزرقَ.

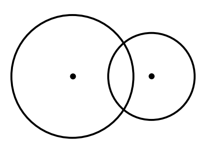


أُلاحِظُ أنَّهُ يوجدُ للدائرتيْنِ مماسّانِ داخليانِ، وآخرانِ خارجيانِ.

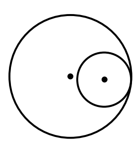
أتحقق من فهمي

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

a)



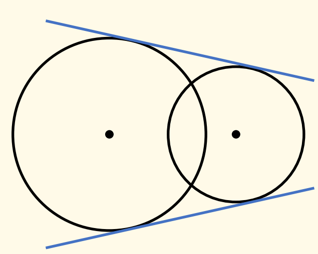
b)



انظر الهامش.

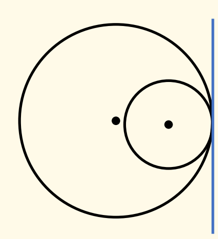
إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 1):

a)



مماسان خارجيان.

b)



مماس واحد خارجي.

3 التدريس

- ذكِّر الطلبة بالأوضاع المختلفة لدائرتين في المستوى، وعلاقة المسافة بين مركزيهما وطولي نصفي قطريهما، ثم اذكر أمثلة على ذلك.
- وضِّح للطلبة مفهوم المماس المشترك لدائرتين، ثم أَدِرْ حوارًا يقودهم إلى استنتاج نوعيه: الداخلي، والخارجي.
- ارسم دوائر في أوضاع مختلفة، ثم اطلب إلى الطلبة تحديد عدد المماسات المشتركة التي يمكن رسمها لهذه الدوائر.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يبين مماسات مشتركة لدائرتين وعددها.

مثال إضافي

- ما عدد المماسات المشتركة التي يمكن رسمها لدائرتين غير متقاطعتين؟ إذا كانتا متباعدتين فإنه يمكن رسم 4 مماسات مشتركة، وإذا كانت إحداهما داخل الأخرى فلا يوجد لهما مماسات مشتركة.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

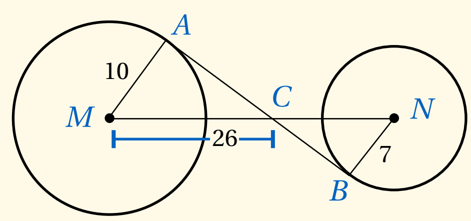
- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يبين كيفية حساب طول مماس مشترك داخلي لدائرتين متباعدتين.
- ناقِش الطلبة في الخطوات المتبعة، ثم اسألهم:
  » هل توجد طريقة بديلة لإيجاد طول $\overline{AB}$ ؟

مثال إضافي

- جد طول $\overline{AB}$ في الشكل المجاور. 40.8 وحدة.



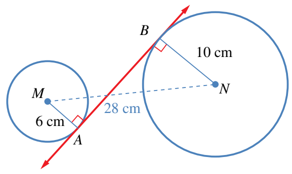
أخطاء مفاهيمية:

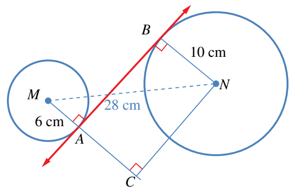
قد يخطئ بعض الطلبة في تطبيق نظرية فيثاغورس، وبخاصة عندما يكـون الطول مجهولًا لأحد ضلعي الزاويـة القائمـة، وذلك بجمـع مربعـي الطولين المعلومين بدلًا من طرحهما؛ لـذا أكِّد لهم أن مربع طول الضلع الأطول (أي الوتـر) في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة، وأن مربع طول أحد ضلعي القائمة يساوي مربع طول الوتر ناقص مربع طول ضلع القائمة الثاني، ثم درِّبهم على الاسـتعانة برسم مبسـط للمثلث توضع عليه عناصره المعلومة.

يُمكِنُ حسـابُ طولِ المماسِّ المشتركِ (المسـافةُ بينَ نقطتَي التَّماسِّ على الدائرتيْنِ) بطريقةٍ مُماثِلةٍ لحسابِ طولِ المماسِّ المرسومِ منْ نقطةٍ خارجَ الدائرةِ إلى نقطةٍ عليْها.

مثال 2

أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.





أمدُّ $\overline{MA}$ على اسـتقامتِهِ، ثمَّ أرسمُ منْ N عمودًا على امتدادِ $\overline{MA}$ ، ثمَّ أُسـمّي نقطةَ تقاطعِ العمودِ معَها C.

$m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$ المماسُّ عموديٌّ على نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ

$m\angle ACN = 90^\circ$ $\overline{NC}$ عموديٌّ على $\overline{MA}$

$m\angle BNC = 90^\circ$ مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360°

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $ACNB$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

$AB = NC$ ضلعانِ مُتقابِلانِ في المستطيلِ

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MCN لأَجِدَ CN:

$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$ نظريةُ فيثاغورس

$= 28^2 - (6+10)^2$ بالتعويضِ

$(CN)^2 = 784 - 256 = 528$ بالتبسيطِ

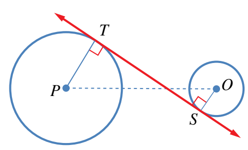
$CN = \sqrt{528} \approx 23$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

$AB = CN \approx 23\,cm$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المشتركِ $\overline{ST}$ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

$PT = 12$ cm, $OS = 4$ cm, $PO = 34$ cm انظر الهامش.



إرشادات للمعلم

بيِّن للطلبة في تدريب بند (**أتحقق من فهمي**) في المثال 2 أنه يمكنهم مد $\overline{PT}$، ورسم عمود من O إلى امتداد $\overline{PT}$ ، ثم إكمال الحل بالطريقة نفسها.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

$(PO)^2 = (PR)^2 + (OR)^2$

$34^2 = (PR)^2 + 16^2 \Rightarrow (PR)^2 = 900$

$PR = 30$

إذن: طول $\overline{ST}$ هو 30 وحدة.

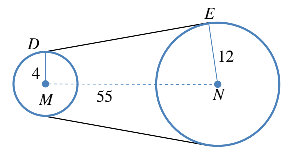
مثال 3: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين طريقة إيجاد طول مماس خارجي لدائرتين متباعدتين.
- ناقِش الطلبة في الخطوات المتبعة.

مثال 3: من الحياة

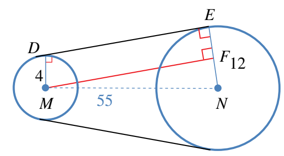
لركوبِ الدرّاجةِ الهوائيةِ فوائدُ صحيةٌ وبيئيةٌ كثيرةٌ، منها: تقويةُ عضلاتِ الجسمِ، والتقليلُ منَ التلوُّثِ الناجمِ عنِ استعمالِ وسائلِ النقلِ التقليديةِ.

درّاجاتٌ: تلتفُّ في درّاجةٍ هوائيةٍ سلسلةٌ معدنيةٌ على عجلتيْنِ مُسنَّنتيْنِ دائريتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغرى 4 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبرى 12 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 55 cm. أجِدُ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ.



المطلوبُ هوَ حسابُ طولِ $\overline{DE}$.

أرسمُ منْ M عمودًا على $\overline{NE}$، ثمَّ أُسمّي نقطةَ تقاطعِهِ معَها F كما في الشكلِ المجاورِ.



المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ: $m\angle NED = m\angle MDE = 90°$

$\overline{MF}$ عموديٌّ على $\overline{NE}$: $m\angle MFE = 90°$

مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ °360: $m\angle DMF = 90°$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $MDEF$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MFN لأَجِدَ طولَ $\overline{MF}$:

نظريةُ فيثاغورس: $(MF)^2 = (MN)^2 - (FN)^2$

بالتعويضِ: $= 55^2 - (12 - 4)^2$

بالتبسيطِ: $(MF)^2 = 3025 - 64 = 2961$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ: $MF = \sqrt{2961} = 54.4$

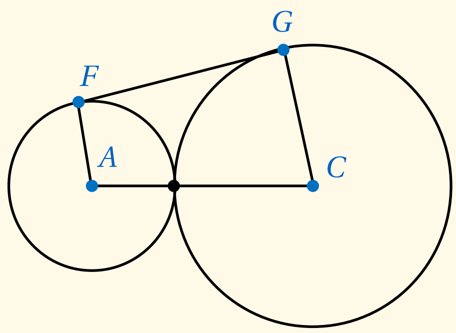
$DE = MF = 54.4$ cm

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الكبرى في درّاجةٍ، علمًا بأنَّ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ 40 cm، وطولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الصغرى 5 cm، والمسافةَ بينَ مركزَيِ العجلتيْنِ المُسنَّنتيْنِ 41 cm. انظر الهامش.

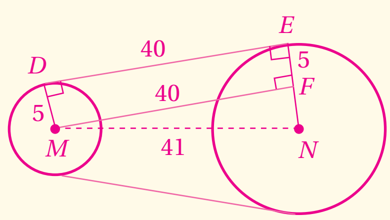
مثال إضافي

- في الشكل المجاور، $\overline{FG}$ مماس مشترك لدائرتين متماستين من الخارج. إذا كان $FG = 60$ cm، و $AC = 65$ cm، فما طول $\overline{GC}$؟ 45 cm



إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

افترض أن $NE = x$ cm، فيكون $FN = (x-5)$ cm



بتطبيق نظرية فيثاغورس، فإن:

$$(x-5)^2 = 41^2 - 40^2 = 81$$

$$x - 5 = 9$$

$$x = 14$$

إذن: طول نصف قطر العجلة الكبرى هو 14 cm .

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل المسائل فيها.
- إذا واجــه بعض الطلبــة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّــر أنه ليس شــرطًا أن يتمكَّن الطلبــة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلــب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأســئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

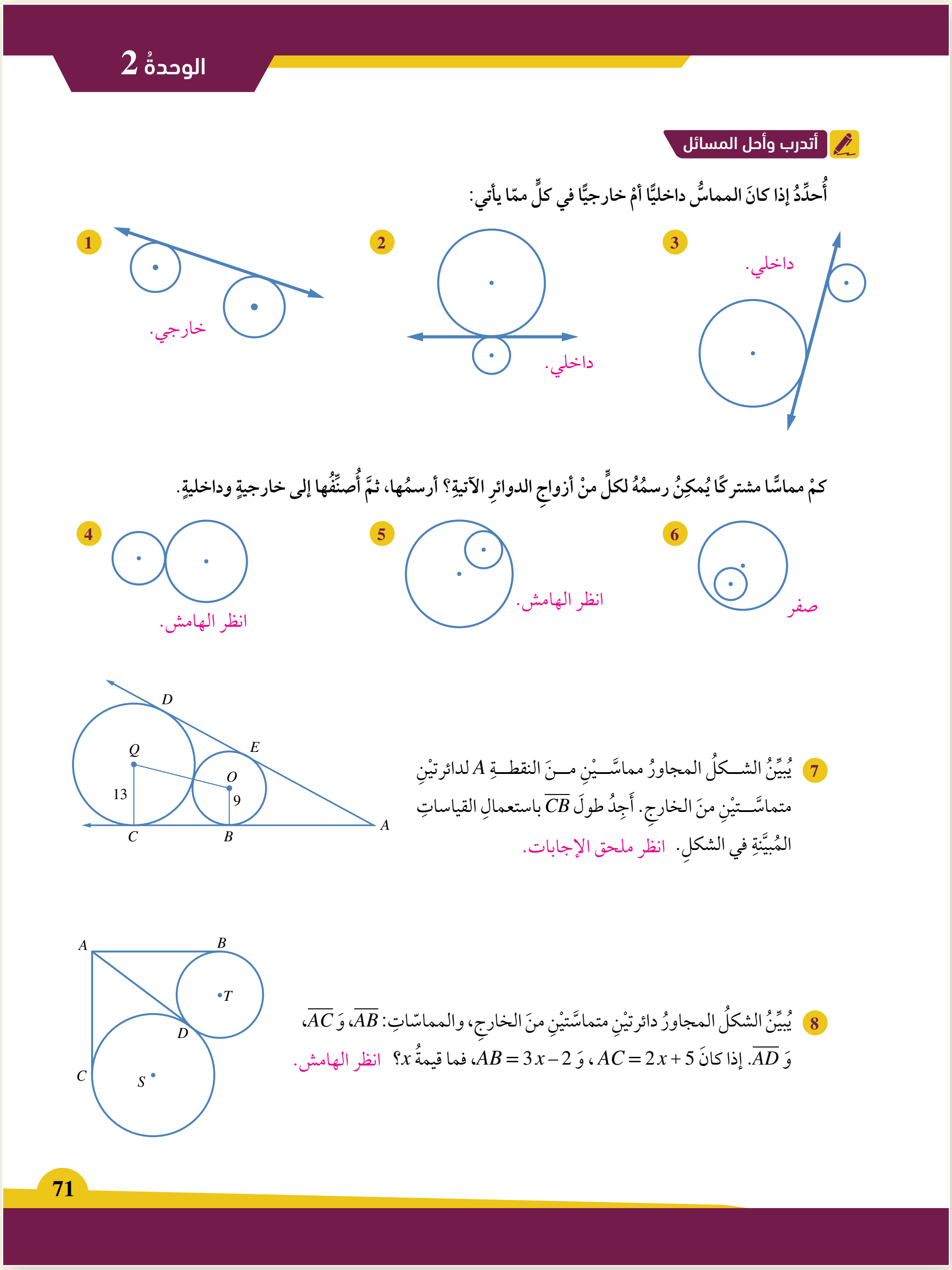
الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة من 9 إلى 12، إضافــةً إلى الأســئلة ذوات الأرقــام الفردية في الصفحة السادسة عشرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل، ثم اطلب إليهم حل مســائل مهارات التفكير العليا ضمن مجموعات غير متجانسة.

تنويع التعليم:

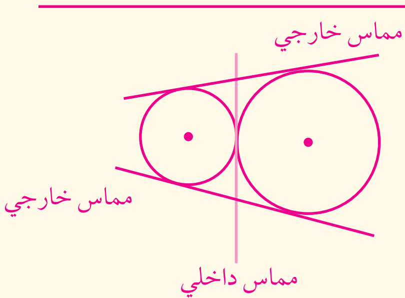
للتوسع في السؤال 7، اطلب إلى الطلبة إيجاد طول $\overline{AB}$.

ســيبحث الطلبة عن مثلثين متشابهين، ثم يكتبون التناسب بيــن أطوال الأضــلاع المتناظرة، ثم يجــدون طول $\overline{AB}$.
$AB = 48.6$

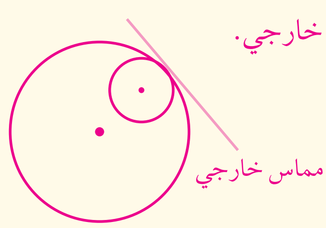


إجابات:

4) مماسان خارجيان، ومماس داخلي.



5) مماس خارجي.

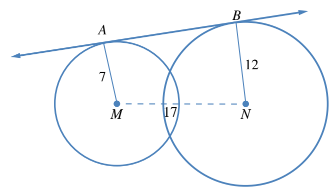


8)

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها T
مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها S

$AB = AD$
$AC = AD$
$AB = AC$
$3x - 2 = 2x + 5$
$x = 7$

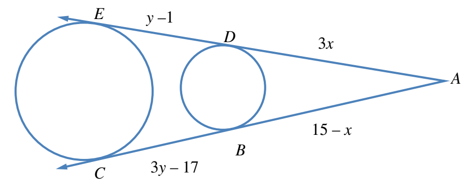
9 أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ.
انظر ملحق الإجابات.



10 حــزامٌ ناقلٌ: يمرُّ حزامٌ حولَ دولابيْنِ دائريّيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغيرِ منْهُما 15 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبيرِ 25 cm. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ الدولابيْنِ 2 m، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدولابيْنِ؟ انظر ملحق الإجابات.

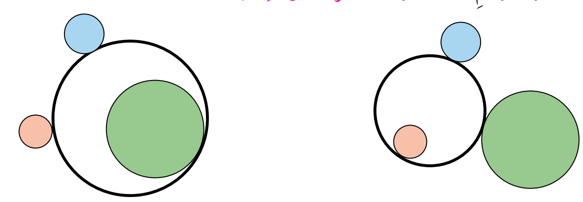
11 أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما إذا كانَتْ معادلتاهُما: $x^2+y^2=25$ ، $x^2+y^2-6x+8y-11=0$.
انظر ملحق الإجابات.

12 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.
انظر ملحق الإجابات.

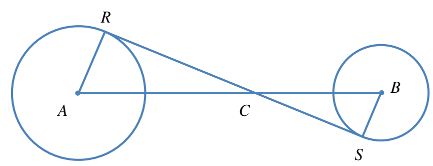


مهارات التفكير العليا

13 تحــدٍّ: يُمثِّلُ الشــكلانِ الآتيانِ طريقتيْنِ لرســمِ دائرةٍ تُلامِــسُ كلًّا منَ الدائــرةِ الزرقاءِ، والخضــراءِ، والحمراءِ. أَجِدُ 6 طرائقَ أُخرى لرسمِ هذهِ الدائرةِ. انظر ملحق الإجابات.



14 برهــانٌ: تُمثِّلُ $\overline{RS}$ في الشــكلِ المجاورِ مماسًّــا داخليًّا مشــتركًا لدائرتيْنِ مركزاهُما A، وَ B على التوالي. أُثبِتُ أنَّ: $\frac{AC}{BC}=\frac{RC}{SC}$.
انظر ملحق الإجابات.



5 الإثراء

- إذا كان طــول مماس مشــترك داخلــي لدائرتين هو 45 وحدة، والمسافة بين مركزيهما 51 وحدة، وطول قطر إحدى الدائرتين 18 وحدة، فما طول قطر الدائرة الأخرى؟ 30 وحدة.

تعليمات المشروع:

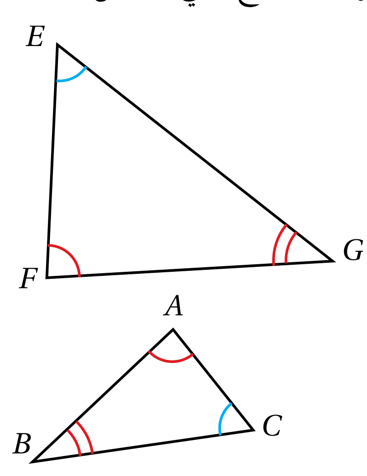
- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمســات النهائية على المشروع، والتأكُّد أن عناصر المشــروع جميعهــا موجودة يوم العرض.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة رسم دائرتين متماستين من الخارج، طولا نصفي قطريهما 4 cm، و 2 cm، وهما تمســان دائرة ثالثة من الداخل، طول قطرها 12 وحدة.

إرشاد:

لحل سؤال 14، وجِّه الطلبة إلى ترتيب رؤوس المثلثين المتشابهين بصورة صحيحة؛ لأهمية ذلك عند كتابة تناسب أطوال الأضلاع. ففي المثلثين المتشابهين المجاورين نكتب الجملة الآتية:



- المثلث ABC يشابه المثلث FGE؛ لأن الزاويــة A تطابــق الزاويــة F، والزاويــة B تطابــق الزاويــة G، والزاوية C تطابق الزاوية E.
- ونكتب تناسب أطوال الأضلاع وفق الترتيب الصحيح: $\frac{AB}{FG}=\frac{AC}{FE}=\frac{BC}{GE}$.

التقويم الختامي:

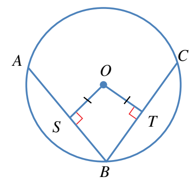
- راجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجابتهم أمام أفراد المجموعات الأخرى.
- اختر جزءًا من الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، وناقِشهم فيها في اليوم التالي.

ملحوظة: تُخصَّص حصتان (90 دقيقة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

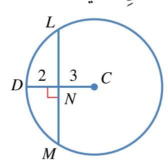
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ في الشكلِ الآتي وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $AS = 4$ cm، وَ $OT = 3$ cm، فـإنَّ طولَ $\overline{BC}$ بالسنتيمتراتِ هوَ:



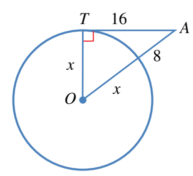
a) 6 b) 7
c) 8 d) 10

2 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ $\overline{LM}$ هوَ:



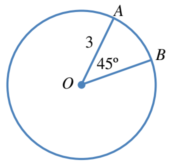
a) 5 b) 8
c) 10 d) 13

3 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ نصفِ قُطرِ الدائرةِ هوَ:



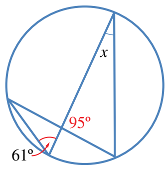
a) 5.75 b) 12
c) 4 d) 8

4 طولُ القوسِ الأصغرِ $\widehat{AB}$ بدلالةِ π في الشكلِ الآتي هوَ:



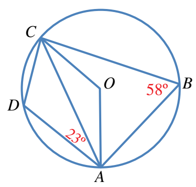
a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

5 قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ:



a) 61° b) 24°
c) 34° d) 95°

6 قياسُ الزاويةِ DCA في الشكلِ الآتي هوَ:



a) 55° a) 41°
b) 35° c) 45°

اختبارُ نهايةِ الوحدة

7 النقطةُ التي لا تقعُ على الدائرةِ التي معادلتُها $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ هيَ:

a) $(-2,-1)$ b) $(1,8)$

c) $(3,4)$ d) $(0,5)$

8 عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ هوَ:

a) 3 b) 2

c) 1 d) 0

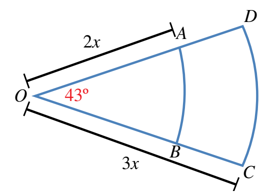
9 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التي تُمثِّلُ النقطتانِ $A(4,-3)$، وَ $B(6,9)$ طرفا قُطْرٍ فيها.

$(x-5)^2+(y-3)^2=37$

يُمثِّلُ الشكلُ التالي قطاعيْنِ دائريّيْنِ منْ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُهُ O. إذا كانَ نصفُ قُطْرِ الدائرةِ الصغرى $2x$، ونصفُ قُطْرِ الدائرةِ الكبرى $3x$، وقياسُ الزاويةِ AOB هوَ $43°$، ومساحةُ المنطقةِ $ABCD$ هيَ $30\ cm^2$، فأجِدُ:

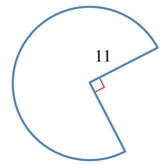
10 قيمةَ x. انظر الهامش.

11 الفرقَ بينَ طولَيِ القوسيْنِ CD، وَ AB.
انظر الهامش.



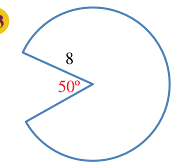
أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

12



$A=285.1$; $L=73.8$

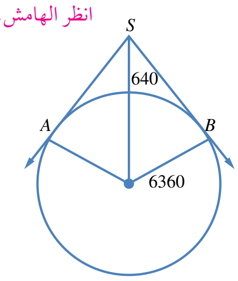
13



$A=173.1$; $L=59.3$

14 **أقمارٌ صناعيةٌ:** يرتفعُ قمرٌ صناعيٌّ مسافةَ 640 km عنْ سطحِ الأرضِ التي نصفُ قُطْرِها 6360 km، ويُمكِنُ منْهُ مشاهدةُ المنطقةِ الواقعةِ بينَ المماسَّيْنِ $\overrightarrow{SB}$ وَ $\overrightarrow{SA}$ منْ سطحِ الأرضِ. ما المسافةُ بينَ القمرِ الصناعيِّ وأبعدِ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدتُها منْهُ على سطحِ الأرضِ؟

انظر الهامش.



15 **حزامٌ مطّاطيٌّ:** يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريّتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

انظر ملحق الإجابات.

إجابات:

10)
$$A=\frac{43}{360}\times 9x^2\times\pi-\frac{43}{360}\times 4x^2\times\pi=30$$
$$\frac{43}{360}\times x^2\times\pi(9-4)=30$$
$$x^2=\frac{30\times 360}{43\times 5\pi}$$
$$x^2\approx 16\Rightarrow x\approx 4\ cm$$

11) الفرق بين طولي القوسين CD ، و AB هو:
$$\frac{43}{360}\times 6x\times\pi-\frac{43}{360}\times 4x\times\pi=\frac{43}{360}\times 2x\times\pi$$
$$\approx\frac{43}{360}\times 2\times 4\times\pi\approx 3\ cm$$

14) المسافة بين القمر الصناعي وأبعد نقطة يمكن مشاهدتها منه على سطح الأرض هي SA :
$$(SA)^2=(640+6360)^2-6360^2$$
$$=7000^2-6360^2$$
$$=8550400$$
$$SA\approx 2924\ km$$

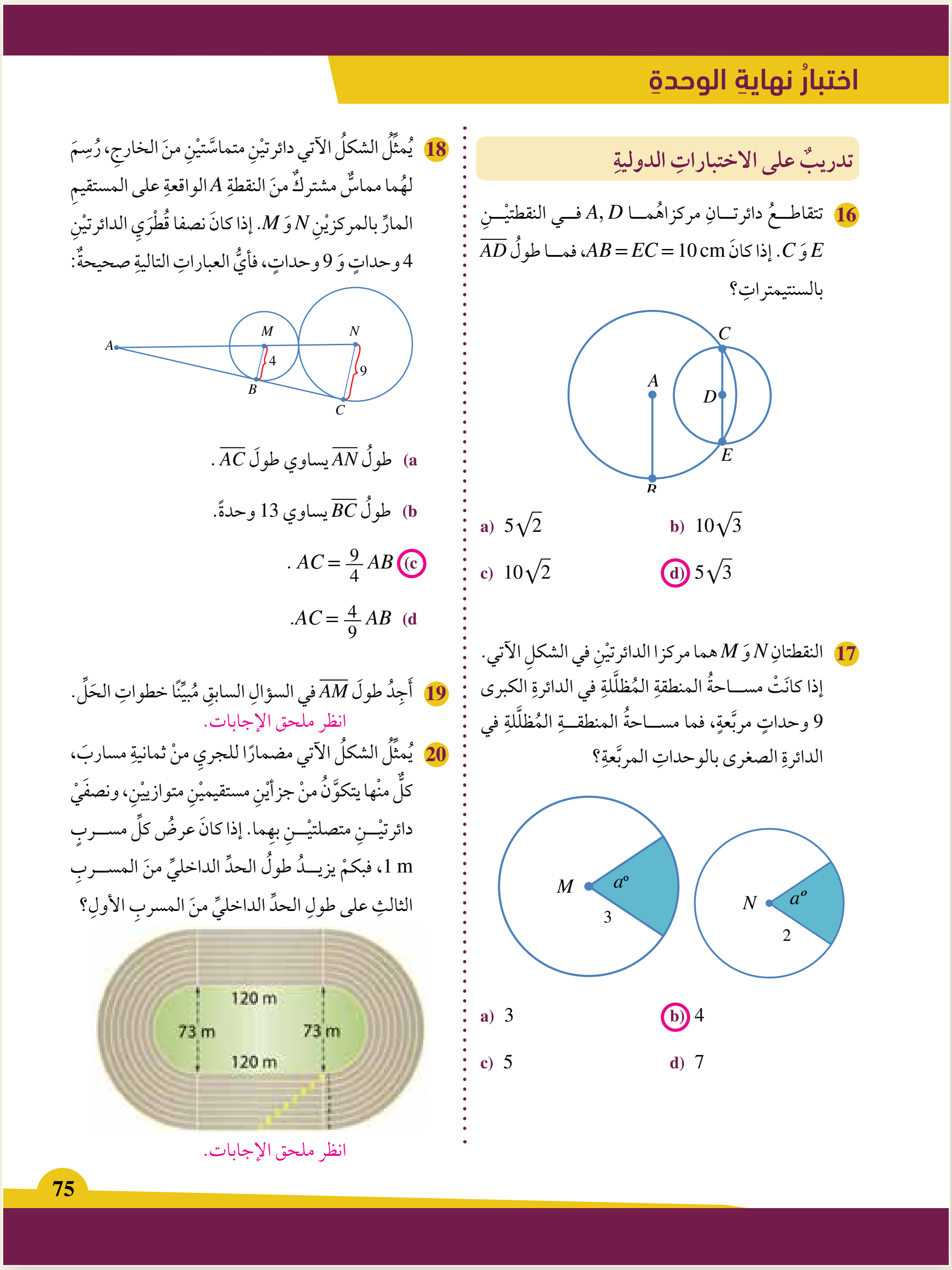
تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

هي أسئلة قُدِّمت في اختبارات وطنية، أو تُحاكيها.

في السؤال 18، ذكِّر الطلبة بحالات تشابه المثلثات، وعلاقة أضلاع كلٍّ من المثلثين الناتجة من حالة التشابه.

مشروع الوحدة:

اطلب إلى الطلبة عرض نتائج مشروعهم، ثم ناقِشهم فيها.



اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

16 تتقاطعُ دائرتانِ مركزاهُما A, D في النقطتيْنِ E وَ C. إذا كانَ $AB = EC = 10\,cm$، فما طولُ $\overline{AD}$ بالسنتيمتراتِ؟

a) $5\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

17 النقطتانِ N وَ M هما مركزا الدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي. إذا كانَتْ مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الكبرى 9 وحداتٍ مربَّعةٍ، فما مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الصغرى بالوحداتِ المربَّعةِ؟

a) 3 b) 4

c) 5 d) 7

18 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، رُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ منَ النقطةِ A الواقعةِ على المستقيمِ المارِّ بالمركزيْنِ N وَ M. إذا كانَ نصفا قُطرَيِ الدائرتيْنِ 4 وحداتٍ وَ 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التاليةِ صحيحةٌ:

a) طولُ $\overline{AN}$ يساوي طولَ $\overline{AC}$.

b) طولُ $\overline{BC}$ يساوي 13 وحدةً.

c) $AC = \frac{9}{4} AB$.

d) $AC = \frac{4}{9} AB$.

19 أجِدُ طولَ $\overline{AM}$ في السؤالِ السابقِ مُبيِّنًا خطواتِ الحَلِّ.

انظر ملحق الإجابات.

20 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي مضمارًا للجري منْ ثمانيةِ مساربَ، كلٌّ منْها يتكوَّنُ منْ جزأيْنِ مستقيميْنِ متوازييْنِ، ونصفَيْ دائرتيْنِ متصلتيْنِ بهِما. إذا كانَ عرضُ كلِّ مسربٍ 1 m، فكمْ يزيدُ طولُ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الثالثِ على طولِ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الأولِ؟

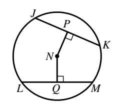
120 m، 73 m، 73 m، 120 m

انظر ملحق الإجابات.

75

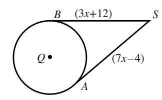
كتاب التمارين

الدرسُ 1
أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها



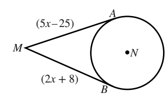
يُمثِّلُ N مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ $JK = LM = 24$ cm، وكانَ $NP = 9$ cm، فأَجِدُ:

1. طولَ $\overline{NQ}$. 9 cm (الوتران المتطابقان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة)
2. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ. 15 cm



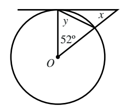
$\overline{SB}$، وَ $\overline{SA}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها Q. إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 10 cm، فأَجِدُ:

3. قيمةَ x. $x = 4$ cm
4. طولَ $\overline{QS}$. $QS = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$ cm



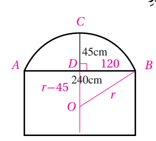
$\overline{MB}$، وَ $\overline{MA}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها N. إذا كانَ $MN = 34$ cm، فأَجِدُ:

5. قيمةَ x. $x = 11$ cm
6. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ. $r = \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{256} = 16$



7. يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسًّا لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ x، وَ y.
$x = 38°;\ y = 64°$

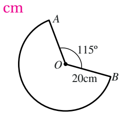
نافذةٌ على شكلِ مستطيلٍ طولُها 240 cm، يعلو المستطيلَ قوسٌ منْ دائرةٍ كما في الشكلِ المجاورِ.
إذا كانَ ارتفاعُ منتصفِ القوسِ عنْ منتصفِ الضلعِ العلويِّ منَ المستطيلِ 45 cm، فأَجِدُ:



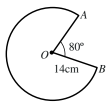
8. طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي كانَ القوسُ جزءًا منْها.
العمود $\overline{CD}$ المار بمنتصف الوتر $\overline{AB}$ يمر بالمركز O.
فإذا كان نصف القطر يساوي r فإن بعد المركز عن الوتر $\overline{AB}$ يساوي $r-45$
من نظرية فيثاغورس ينتج أن:
$r^2 = 120^2 + (r-45)^2$
$90r = 120^2 + 45^2 = 16425$
$\Rightarrow r = 182.5$ cm

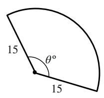
الدرسُ 2
الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ

1. أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 120°، وطولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ 21 cm.
$\ell = 14\pi \approx 44.0$ cm ; $A = 147\pi \approx 461.8$ cm^2
2. أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ إذا كانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 135°، وطولُ قُطْرِ الدائرةِ 14 cm.
$\ell = 5.25\pi \approx 16.5$ cm ; $A = 18.375\pi \approx 57.7$ cm^2
3. إذا كانَتْ مساحةُ قطاعٍ دائريٍّ 35 cm^2، وكانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 72°، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟
$r \approx 7.5$ cm
4. إذا كانَتْ مساحةُ قطاعٍ دائريٍّ 60 cm^2، وكانَ قياسُ زاويةِ القطاعِ 45°، فما طولُ قُطْرِ الدائرةِ؟ $d \approx 24.7$ cm
5. أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ الآتي.
$L \approx 188.3$ cm

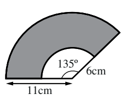


6. أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ الآتي.
$L \approx 96.4$ cm





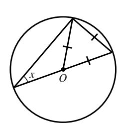
7. إذا كانَتْ مساحةُ القطاعِ الدائريِّ المجاورِ 200 cm^2، فما قيمةُ θ؟
$\theta \approx 101.9°$



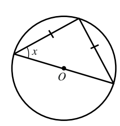
8. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ المجاورِ.
100.1 cm^2
9. **علومٌ**: وُضِعَتْ كرةٌ طولُ قُطْرِها 15cm على بُعْدٍ أفقيٍّ يساوي x منْ عينِ آلاءَ. إذا كانَ طولُ خطِّ البصرِ الواصلِ بينَ مركزِ العينِ وأبعدِ نقطةٍ على الكرةِ يُمكِنُ أنْ تراها آلاءُ هوَ 40cm، فما قيمةُ x؟
انظر ملحق الإجابات

الدرسُ 3
الزوايا في الدائرةِ

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فما قيمةُ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ؟

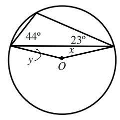
1. 

$x = 30°$

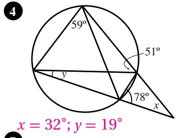
2. 

$x = 45°$

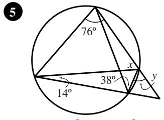
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في ما يأتي (أفترِضُ أنَّ O هيَ مركزُ الدائرةِ):

3. 

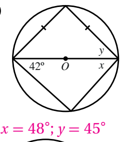
$x = 134°;\ y = 23°$

4. 

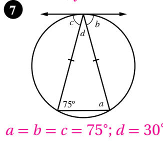
$x = 32°;\ y = 19°$

5. 

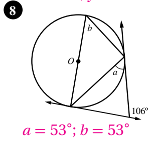
$x = 52°;\ y = 52°$

6. 

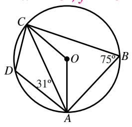
$x = 48°;\ y = 45°$

7. 

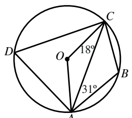
$a = b = c = 75°;\ d = 30°$

8. 

$a = 53°;\ b = 53°$



9. تقعُ النقاطُ: A، وَ B، وَ C، وَ D على دائرةٍ مركزُها O. اعتمادًا على القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ OCA، وَ DCA.
$m\angle OCA = 15°;\ m\angle DCA = 44°$



10. تقعُ النقاطُ: A، وَ B، وَ C، وَ D على دائرةٍ مركزُها O. اعتمادًا على القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ OAC، وَ BCA.
$m\angle BCA = 41°;\ m\angle OAC = 18°$

كتاب التمارين

الدرسُ 4

معادلةُ الدائرةِ

أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(2, -4)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 6 وحداتٍ. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$
2. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(-3, -1)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ. $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$
3. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(2, 0)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 10)$. $(x-2)^2 + y^2 = 109$
4. دائرةٌ مركزُها النقطةُ $(7, 3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(3, -1)$. $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 32$
5. دائرةٌ تُمثِّلُ النقطتانِ $A(11, -4), B(5, 6)$ نهايتَيْ قُطْرٍ فيها. $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 34$
6. دائرةٌ تُمثِّلُ النقطتانِ $S(4,12), T(6\ ,\ -8)$ نهايتَيْ قُطْرٍ فيها. $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 101$

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلِّ دائرةٍ في ما يأتي:

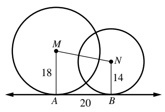
7. $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 169$ $(-6, 3);\ r = 13$
8. $3x^2 + 3y^2 + 12x - 36y - 72 = 0$ $(-2, 6);\ r = 8$
9. $x^2 + (y-7)^2 = 225$ $(0, 7);\ r = 15$
10. $2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 10 = 0$ $(5, 4);\ r = 6$

11. أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $T(8,7)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 41$.
انظر ملحق الإجابات
12. تُمثِّلُ النقاطُ: $A(-5, -2)$، و $B(7, -8)$، وَ $C(3, -16)$ مواقعَ 3 أبراجِ اتصالاتٍ. أَجِدُ موقعَ البرجِ الرابعِ الذي يبعدُ المسافةَ نفسَها عنِ الأبراجِ الثلاثةِ، ثمَّ أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التي تقعُ عليْها الأبراجُ الثلاثةُ. انظر ملحق الإجابات

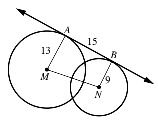
الدرسُ 5

الدوائرُ المتماسَّةُ

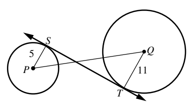
1. كَمْ مماسًّا مشتركًا داخليًّا يُمكِنُ أنْ أرسمَ لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ؟ صفر
2. كَمْ مماسًّا مشتركًا خارجيًّا يُمكِنُ أنْ أرسمَ لدائرتيْنِ متقاطعتيْنِ؟ 2



3. إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ؟
$(MN)^2 = 20^2 + 4^2 = 416$
$MN \approx 20.4$



4. إذا كانَ $\overleftrightarrow{AB}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ؟
$(MN)^2 = 15^2 + 4^2 = 241$
$MN \approx 15.5$



5. إذا كانَ $\overleftrightarrow{ST}$ مماسًّا مشتركًا للدائرتيْنِ في الشكلِ المجاورِ، وكانَ $PQ = 34$ cm، فما طولُ $\overleftrightarrow{ST}$؟
$(ST)^2 = 34^2 - 16^2 = 900$
$ST = 30$ cm
6. رُسِمَتْ دائرتانِ، الأولى مركزُها M، وطولُ نصفِ قُطْرِها 25 cm، والثانيةُ مركزُها N، وطولُ نصفِ قُطْرِها 36 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 61 cm، ورُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ، مَسَّ الصغرى في النقطةِ A، ومَسَّ الكبرى في النقطةِ B. ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ $AMNB$؟ ما أطوالُ أضلاعِهِ؟ انظر ملحق الإجابات
7. رُسِمَتْ دائرتانِ، الأولى مركزُها P، وطولُ نصفِ قُطْرِها 12 cm، والثانيةُ مركزُها Q، وطولُ نصفِ قُطْرِها 27 cm، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما 39 cm، ورُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ، مَسَّ الصغرى في النقطةِ R، ومَسَّ الكبرى في النقطةِ S. ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ $RPQS$؟ ما أطوالُ أضلاعِهِ؟ انظر ملحق الإجابات

الدرس 1:

13) $OX = OY$ (نصفا قطرين في الدائرة).

$PO = PO$ (ضلع مشترك).

$m\angle PXO = m\angle PYO = 90°$ (المماس يعامد نصف القطر).

يتطابق المثلثان القائمان بضلع ووتر.

16) تُعيَّن نقطتان على حافة الطاولة، ويوصَل بينهما بقطعة مستقيمة، ثم يُستعمَل فرجار ومسطرة لرسم المنصف العمودي لهذه القطعة المستقيمة، ويُمَدُّ هذا العمود من الجهتين حتى يقطع حافة الطاولة في نقطتين تسميان C, D، ثم يُرسَم المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$، فتكون نقطة تقاطع هذا المنصف مع $\overline{CD}$ هي مركز الطاولة.

21) $\overline{NP}$ يعامد الوتر $\overline{AB}$؛ فهو ينصفه؛ أي إن: $AP = 7$ cm

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم APN، فإن:

$$(PN)^2 = (AN)^2 - (AP)^2$$
$$= 12^2 - 7^2 = 95$$
$$PN = \sqrt{95} \approx 9.75 \text{ cm}$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم APO، فإن:

$$OP \approx 16.58 \text{ cm}$$
$$ON = OP + PN \approx 26.33 \text{ cm}$$

22) وصل O مع A, D، فينتج مثلثان قائمي الزاوية OMA, OND فيهما:

$OA = OD$ (نصفا قطرين في الدائرة).

$m\angle OND = m\angle OMA = 90°$

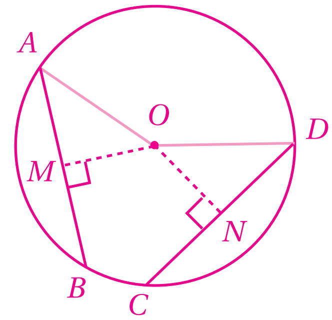
$ND = \frac{1}{2} DC$ (العمود المرسوم من مركز الدائرة إلى وتر فيها ينصفه).

$AM = \frac{1}{2} AB$ (العمود المرسوم من مركز الدائرة إلى وتر فيها ينصفه).

$ND = AM$ (لأن $CD = AB$).

فيتطابق المثلثان القائمان بضلع ووتر، وتكون عناصرهما المتناظرة متطابقة.

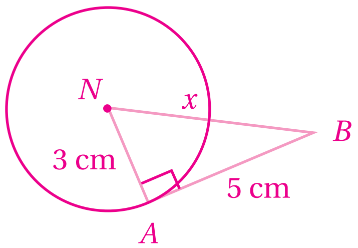
إذن: $ON = OM$؛ أي إن الوترين AB, CD يبعدان المسافة نفسها عن المركز O.



23) رسم شكل، وافتراض أن $BN = x$

قول سارة غير صحيح؛ لأن BN هو وتر في المثلث القائم ABN وعليه، فإن:

$$(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2$$
$$x^2 = 25 + 9 = 34$$
$$x = \sqrt{34} \approx 5.8 \text{ cm}$$



الدرس 2:

23) مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة المثلث ABC مطروحًا منها مساحة القطاع الدائري APQ

مساحة المثلث تساوي cm^2: $\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

(لأن قاعدته 6، وارتفاعه $\sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$).

مساحة القطاع الدائري APQ تساوي cm^2: $\frac{60}{360} \times 3^2 \times \pi = 1.5\pi$

(لأن نصف قطر الدائرة 3، وزاوية القطاع $60°$).

مساحة الجزء المظلل تساوي: $9\sqrt{3} - 1.5\pi \approx 10.9 \text{ cm}^2$

الدرس 3:

21) بافتراض أن $m\angle AED = x$، فإن $m\angle ABC = x$؛ لأنهما زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع، ولكن $m\angle ADC = 180°$؛ لأن ABC، و ADC زاويتان متقابلتان في رباعي دائري.

وأيضًا $m\angle ADE + m\angle ADC = 180°$؛ لأنهما تُكوِّنان زاوية مستقيمة.

إذن: $m\angle ADE + 180° - x = 180°$

أي إن: $m\angle ADE = x$

إذن: $m\angle ADE = m\angle AED$

26) $m\angle ACB = m\angle BAY = 64°$

$$m\angle ACX = 180° - m\angle ACB = 180° - 64° = 116°$$
$$m\angle CAX = 180° - (32° + 116°) = 32°$$
$$m\angle AXC = m\angle CAX = 32°$$

إذن: المثلث ACX متطابق الضلعين؛ لأن فيه زاويتين متطابقتين.

28) $m\angle AOP = 2x$

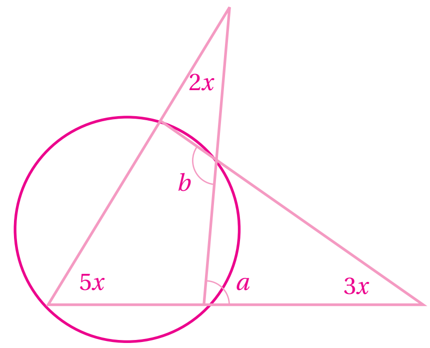
$$m\angle APO = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x$$
$$m\angle APT = 90° - (90° - x) = 90° - 90° + x = x$$
$$m\angle APT = m\angle APB = x$$

29) $a = 5x + 2x = 7x$

(زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث الكبير الأيسر).

$b = a + 3x$ (زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث الأيمن).

$= 7x + 3x = 10x$



الزاويتان اللتـــان قياس كلٍّ منهما $b, 5x$ هما زاويتـــان متقابلتان في مضلع رباعي دائري، إذن: مجموع قياسيهما هو $180°$

وعليه، فإن: $5x + b = 180°$

$$5x + b = 180°$$
$$5x + 10x = 180°$$
$$15x = 180°$$
$$x = 12°$$

الدرس 4:

18) معادلة الدائرة التي تمثل حدود المنطقة التي يصلها البث هي:

$$(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 224^2$$

بتعويض إحداثيات النقطة التي تمثل موقع بيت عمر في المعادلة، ينتج:

$$(-75 - 7)^2 + (95 - 4)^2 = 224^2$$
$$42928704 = 50176$$

وهي عبارة غير صحيحة.

وبما أن الطرف الأيســر أكبر من الطرف الأيمــن، فإن بيت عمر يقع خارج المنطقة التي يصلها البث.

19) $(2(x-2))^2 + (2(y+3))^2 = 100$

$$4(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 100$$

بالقسمة على 4 ينتج: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

المركز هو $(2, -3)$، وطول نصف القطر 5 وحدات.

20) بإكمال المربع ينتج أن:

$$(x + \frac{P}{2})^2 + (y + 3)^2 = 96 + (\frac{P}{2})^2 + 9$$
$$r^2 = 96 + (\frac{P}{2})^2 + 9$$
$$11^2 = 105 + \frac{P^2}{4} \Rightarrow 121 - 105 = \frac{P^2}{4} \Rightarrow p^2 = 64 \Rightarrow p = 8$$

إذن:

مركــز الدائــرة: $(-4, -3)$، وبُعْده عــن نقطة الأصــل: $\sqrt{16+9}$ ؛ أي 5 وحدات.

21) بمـــا أن الدائرة الصغـــرى تمس المحور x، فإن طـــول نصف قطرها 3 وحدات، ومعادلتها هي:

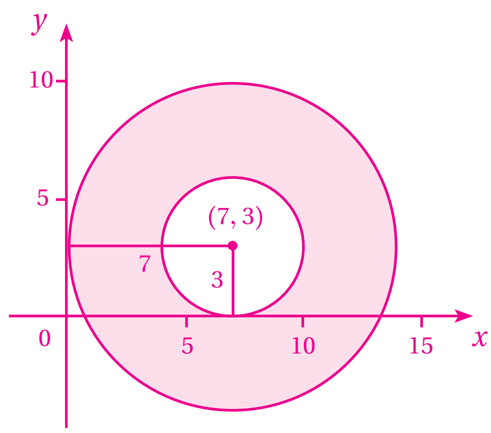
$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

وبما أن الدائرة الكبرى تمس المحور y، فإن طول نصف قطرها 7 وحدات، ومعادلتها هي:

$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$$

مســـاحة الممر يساوي الفرق بين مســـاحة الدائرة الكبرى ومساحة الدائرة الصغرى.

$$A = 7^2 \times \pi - 3^2 \times \pi = 40\pi$$



25) بتعويض $y = 3x - 2$ في معادلة الدائرة، ينتج:

$$x^2 + (3x - 2)^2 + 4x - 24(3x-2) + 108 = 0$$
$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + 4x - 72x + 48 + 108 = 0$$
$$10x^2 - 80x + 160 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$$
$$y = 3(4) - 2 = 10$$

إذن: هـــذا المســـتقيم مماس للدائرة؛ لأنـــه يقطعها في نقطـــة واحدة فقط هي: $(4, 10)$.

27) نعم، قولـــه صحيح؛ فإذا حُوِّلت المعادلة إلى الصورة القياســـية فإن طرفها الأيمن يكون سالبًا، ولا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب.

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = -59 + 49 + 9 \Rightarrow (x-7)^2 + (y+3)^2 = -1$$

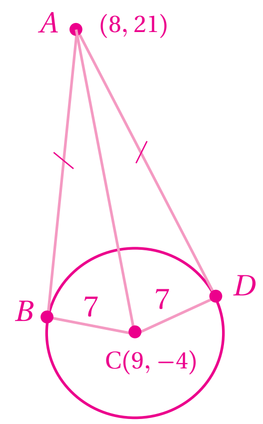
28) $(AB)^2 = (8-9)^2 + (21-(-4))^2 - 49 = 577$

$AB = \sqrt{577} \approx 24$

مساحة الشكل $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث القائم ABC:

$2 \times (\frac{1}{2} \times 24 \times 7) = 168$

إذن: مساحة الشكل $ABCD$ هي 168 وحدة مربعة تقريبًا.



29) لتكن الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = j^2$

بفك الأقواس، ينتج:

$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = j^2$

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - j^2 = 0$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعطاة في السؤال، وهي:

$x^2 + y^2 + 8x \;\; -10y \;\; + 24 = 0$

ينتج أن: $8 = -2h\,;\; -10 = -2k\,;\; 24 = h^2 + k^2 - j^2$

أي إن: $24 = (-4)^2 + 5^2 - j^2 \Rightarrow j^2 = 17\,; h = -4;\;\; k = 5$

إذن: الصورة القياسية لهذه المعادلة هي: $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 17$.

الدرس 5:

7) يُرسَم العمود $\overline{OP}$ على $\overline{QC}$، فينتج المستطيل $OPCB$، والمثلث القائم OPQ.

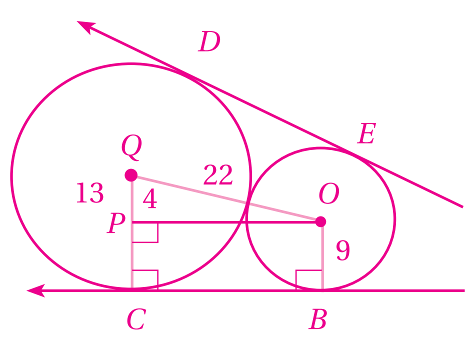
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث OPQ، فإن:

$22^2 = 4^2 + (OP)^2$

$(OP)^2 = 22^2 - 4^2 = 468$

$OP \approx 21.6$

$CB = OP \approx 21.6$



9) يُرسَم العمود $\overline{MC}$ على $\overline{NB}$، فينتج المستطيل $ABCM$، والمثلث القائم MCN.

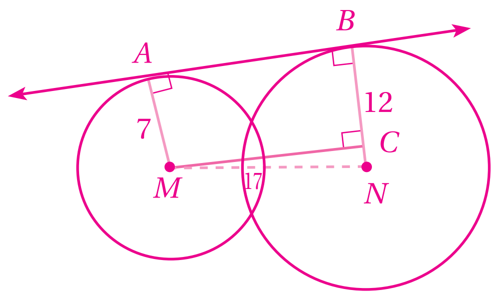
بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث MCN، فإن:

$17^2 = (MC)^2 + 5^2$

$(MC)^2 = 264$

$MC \approx 16.2$

$AB = MC \approx 16.2$



10) يُرسَم شكل يُوضِّح المسألة.

لتكن النقطتان S، و T مركزي الدولابين، ولتكن A، و B نقطتي تماس الحزام مع الدولابين.

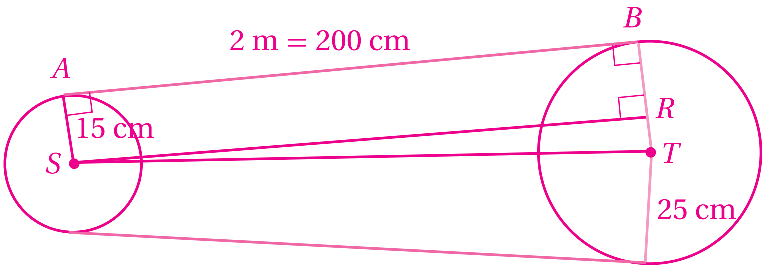
يُرسَم العمود $\overline{SR}$ على $\overline{TB}$، فينتج المستطيل $ABRS$، والمثلث القائم SRT.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث SRT، فإن:

$(ST)^2 = (SR)^2 + 10^2$

$(ST)^2 = 200^2 + 10^2 = 40100$

$ST \approx 200.2$ cm



11) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 11 = 0$

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$

مركز هذه الدائرة هو $(3, -4)$، وطول نصف قطرها 6 وحدات،

ومركز الدائرة الثانية هو $(0, 0)$، وطول نصف قطرها 5 وحدات.

المسافة بين مركزيهما هي: $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

مجموع نصفي القطرين هو 11، والفرق بينهما 1

بما أن $1 < 5 < 11$، فإن الدائرتين متقاطعتان في نقطتين.

12) $AB = AD$ مماسان للدائرة الصغرى، مرسومان من النقطة A:

$$3x = 15 - x$$

$$4x = 15 \Rightarrow x = 3.75$$

$AE = AC$ مماسان للدائرة الكبرى، مرسومان من النقطة A:

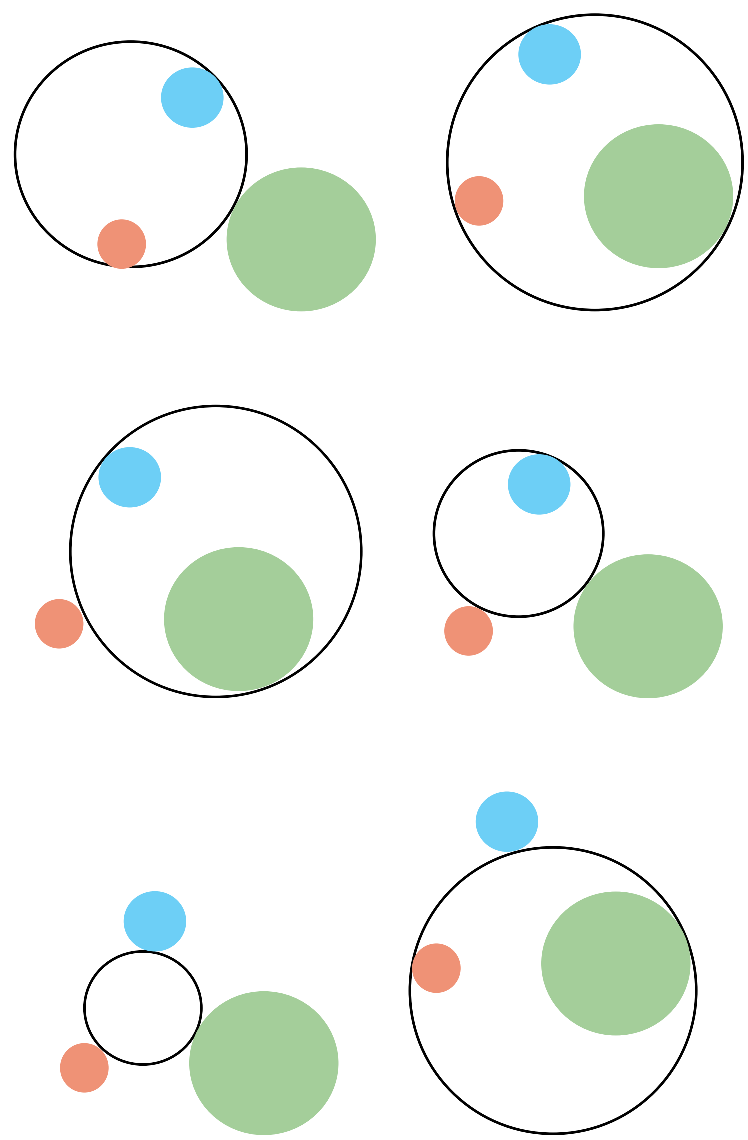
$$3x + y - 1 = 15 - x + 3y - 17$$

$$2y = 4x + 1$$

$$2y = 15 + 1 = 16$$

$$y = 8$$

13) في ما يأتي الطرائق الســت الأخرى لرســم دائرة تمس ثلاث دوائر متباعدة معطاة:



14) المثلثان BSC ، و ARC متشابهان؛ لأن:

$m\angle RCA = m\angle SCB$ (زاويتان متقابلتان بالرأس).

$m\angle ARC = m\angle BSC = 90°$ (المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس).

إذن: يتشابه المثلثان ARC، و BSC؛ لأن زاويتين في المثلث الأول مطابقتان لزاويتين مناظرتين لهما في المثلث الثاني.

نتيجة لهذا التشابه؛ فإن الأضلاع المتناظرة في المثلثين ARC تكون متناسبة؛ أي إن:

$$\frac{AR}{BS} = \frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$$

إذن: $\frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$

اختبار نهاية الوحدة

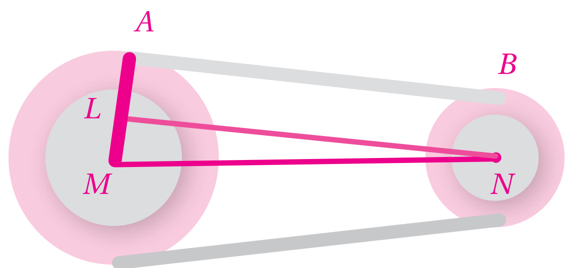
15) بافتــراض أن مركــزي البكرتين همــا: M، و N، وأن نقطتي تماس الحــزام مع البكرتين هما: A، و B، يُرسَــم عمود مــن N إلى $\overline{AM}$ كما في الشكل المجاور.

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم MLN ، فإن:

$$(MN)^2 = (NL)^2 + (ML)^2$$

$$= 25^2 + (8-3)^2 = 650$$

$$MN = \sqrt{650} \approx 25.5 \text{ cm}$$



19) المثلثان AMB، و ANC متشابهان؛ لأن:

$m\angle ABN = m\angle ACM = 90°$ (المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس).

$m\angle BAM = m\angle CAN$ (زاوية مشتركة في المثلثين).

إذن: يتشابه المثلثان؛ لوجود زاويتين في المثلث الأول مطابقتين لنظيرتيهما في المثلث الثاني.

نتيجة لذلك؛ فإن الأضلاع المتناظرة في المثلثين تكون متناسبة؛ أي إن:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$$

إذن: $\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$

ولكن: $AN = AM + MN = AM + 13$ ،

بافتراض أن $AM = x$

إذن: $\frac{x}{x+13} = \frac{4}{9}$

$$9x = 4x + 4(13)$$

$$5x = 52 \Rightarrow x = 10.4$$

20) طول الحد الداخلي للمسرب الأول يساوي محيط نصفي دائرة قطرها 73 m مضافًا إليه طولي الجزأين المستقيمين من المسرب:

$$L_1 = 2\left(\frac{73\pi}{2}\right) + 2(120) = 240 + 73\pi \approx 469.3 \text{ m}$$

طول الحد الداخلي للمسرب الثالث يساوي محيط نصفي دائرة قطرها 77 m مضافًا إليه طولي الجزأين المستقيمين من المسرب:

$$L_3 = 2\left(\frac{77\pi}{2}\right) + 2(120) = 240 + 77\pi \approx 481.9 \text{ m}$$

$$L_3 - L_1 = 481.9 - 469.3 = 12.6 \text{ m}$$

إذن: يزيد الحد الداخلي للمسرب الثالث بنحو 12.6 m على الحد الداخلي للمسرب الأول.

كتاب التمارين: الدرس 2:

9) خط بصر آلاء $\overrightarrow{AB}$ يمثل مماسًا للكرة، وتمثل الدائرة مقطعًا من الكرة يمر بمركزها.

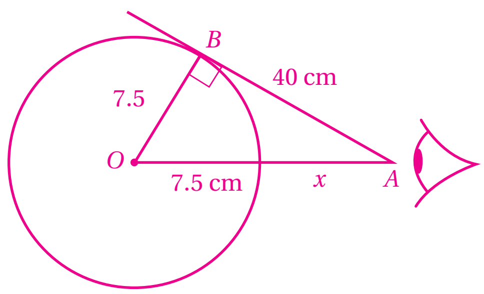
نصف قطر الدائرة يساوي نصف قطر الكرة وهو 7.5 cm

من نظرية فيثاغورس ينتج أن:

$$(x + 7.5)^2 = 40^2 + 7.5^2 = 1656.25$$

$$x + 7.5 \approx 40.7$$

$$x \approx 48.2 \text{ cm}$$

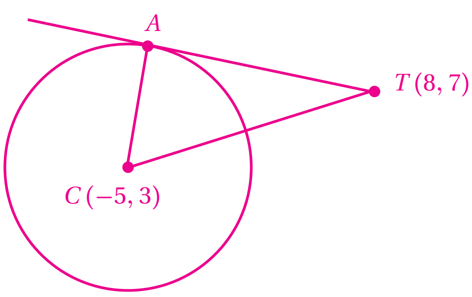


كتاب التمارين: الدرس 4:

11)

$$(TA)^2 = \left((8-(-5))^2 + (7-3)^2\right) - 41 = 144$$

$$\Rightarrow TA = 12$$



12)

أفرض أن موقع البرج الرابع هو (x, y)

إذن، $(x-3)^2 + (y+16)^2 = (x-7)^2 + (y+8)^2$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 32y + 256 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 16y + 64$$

$$8x + 16y = -152 \Rightarrow x + 2y = -19 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

وبتبسيطها ينتج أن: $(x-3)^2 + (y+16)^2 = (x+5)^2 + (y+2)^2$ وكذلك،

$$-16x + 28y = -236 \Rightarrow -4x + 7y = -59 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

وبحل المعادلتين 1 و 2 نجد أن $x = -1; y = -9$ موقع البرج الرابع هو $(-1, -9)$ وهو مركز الدائرة، ومعادلتها هي: $(x+1)^2 + (y+9)^2 = 65$

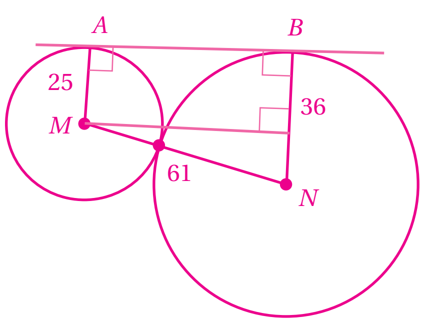
كتاب التمارين: الدرس 5:

6) الدائرتان متماستان من الخارج لأن المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع طولي نصفي قطريهما.

الشكل $AMNB$ شبه منحرف فيه: $AM = 25$ cm; $BN = 36$ cm

و $MN = 61$ cm ونحسب طول الضلع الرابع كما يلي:

$$(AB)^2 = 61^2 - 11^2 = 3600 \Rightarrow AB = 60 \text{ cm}$$



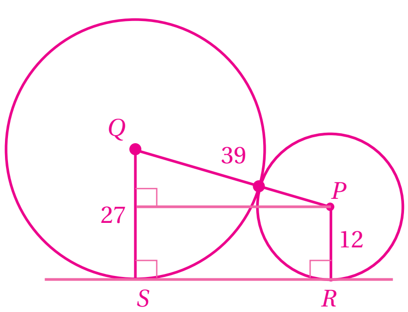
7) الدائرتان متماستان من الخارج لأن المسافة بين مركزيهما تساوي مجموع طولي نصفي قطريهما.

الشكل $RPQS$ شبه منحرف فيه: $RP = 12$cm

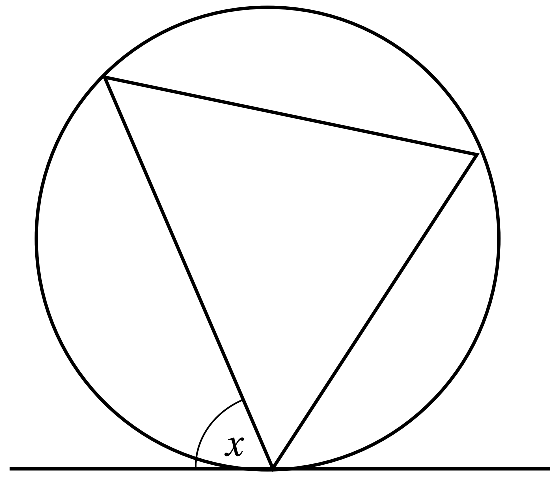
$PQ = 39$ cm و $QS = 27$ cm

ونحسب طول الضلع الرابع كما يلي:

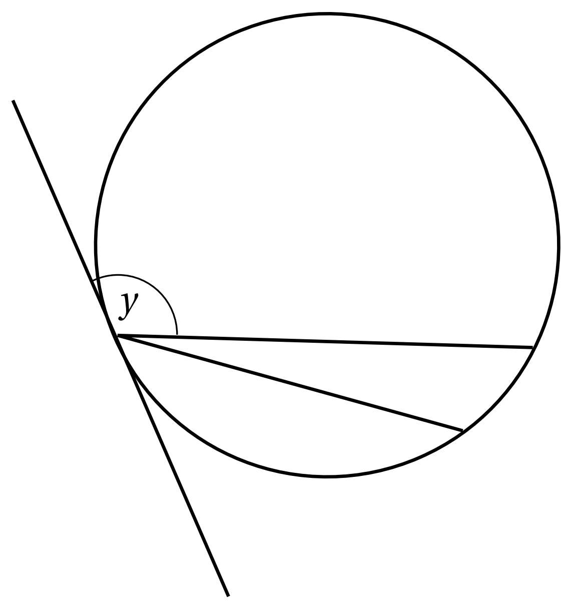
$$(SR)^2 = 39^2 - 15^2 = 1256 \Rightarrow SR = 36 \text{ cm}$$



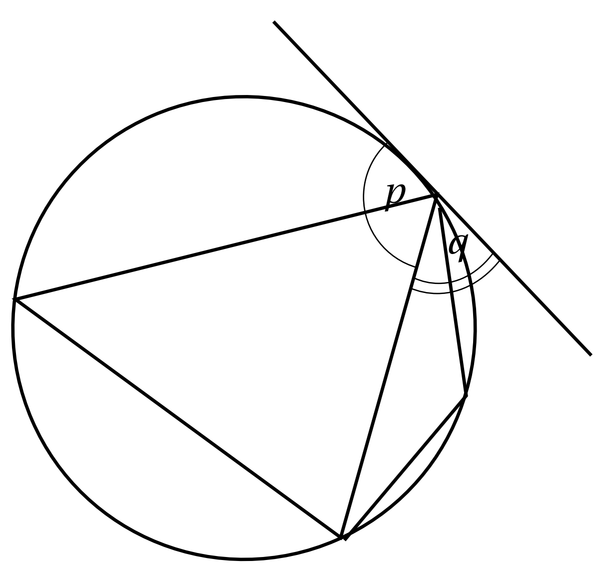
ورقة المصادر 1



الشكل (1).



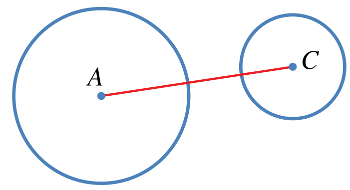
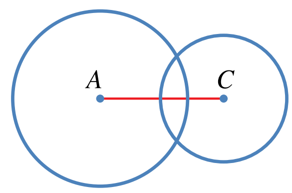
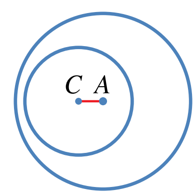
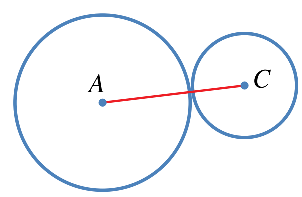
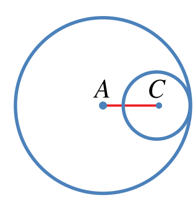
الشكل (2).



الشكل (3).

ورقة المصادر 2

أُقارنُ بينَ قيمِ $r_2 + r_1$، وَ $r_2 - r_1$ وَ AC، ثمَّ أستنتجُ العلاقةَ بينَها وبينَ وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

وضعُ الدائرتيْنِ	r_1	r_2	AC	$r_1 - r_2$	$r_1 + r_2$	الاستنتاجُ
						
						
						
						
						

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	خطوات تنفيذ مشروع الوحدة	عدد الحصص
تهيئة الوحدة	• يتعرف الوحدة وأهدافها. • يتحقق من المتطلبات السابقة اللازمة.	النسب المثلثية. المستوى الإحداثي.	• كتاب التمارين. • برمجية جيوجبرا.	توزيع الطلبة إلى مجموعات صغيرة غير متجانسة.	1
الدرس 1: النسب المثلثية.	• يتعرف الوضع القياسي للزاوية، والقياس الموجب، والقياس السالب للزوايا. • يرسم الزاوية ضمن دائرة الوحدة. • يحدد الزوايا الربعية، وقياس كل منها. • يحسب النسب المثلثية الأساسية لزوايا يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة عند نقطة محددة. • يستعمل المتطابقة $\sin^2x + \cos^2x = 1$ في إيجاد باقي النسب المثلثية لزاوية إذا عُلِمت إحدى هذه النسب، وموقع ضلع انتهاء الزاوية.	ضلع الابتداء. ضلع الانتهاء. الوضع القياسي. دائرة الوحدة. الزاوية الربعية.	• المسطرة. • المنقلة. • الفرجار. • الآلة الحاسبة.	تنفيذ الجزء الأول من الخطوة الأولى (رسم المستوى القطبي، وتحديد النقاط عليه).	4
الدرس 2: النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة.	• يستعمل النسب المثلثية للزوايا الخاصة وزاوية المرجع في حساب النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة. • يستعمل الآلة الحاسبة وزاوية المرجع في حساب النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة. • يستعمل معكوس النسبة المثلثية والآلة الحاسبة في إيجاد الزوايا ضمن الدورة الواحدة إذا عُلِمت النسبة المثلثية. • يوظف النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة في نمذجة مواقف حياتية.	الزاوية المرجعية. معكوس النسبة المثلثية.	• الآلة الحاسبة. • صندوق. • بطاقات.	متابعة تنفيذ الخطوة الأولى، والبدء بتنفيذ الخطوة الثانية.	3
الدرس 3: الزوايا تمثيل الاقترانات المثلثية.	• يمثل الاقترانات المثلثية الأساسية التي مجالها $[0°, 360°]$ بيانيًا. • يحدد خصائص الاقترانات المثلثية الأساسية عن طريق تمثيلها البياني.		• برمجية جيوجبرا. • الآلة الحاسبة.	متابعة تنفيذ الخطوة الثانية، وبدء الاستعداد لعرض النتائج.	2
الدرس 4: حل المعادلات المثلثية.	• يحل معادلة مثلثية تتضمن النسب المثلثية الأساسية حلًّا أوليًّا (مجموعة الحل ضمن الدورة الواحدة). • يوظف المعادلات المثلثية في نمذجة مواقف حياتية.	المعادلة المثلثية.	• الآلة الحاسبة.	استكمال التحضير لعرض النتائج.	3
عرض نتائج المشروع			• أوراق. • لوحة من الكرتون. • أدوات هندسية. • الآلة الحاسبة.	عرض النتائج.	1
اختبار الوحدة			• كتاب الطالب. • دليل المعلِّم. • الآلة الحاسبة.		2
مجموع الحصص					16

الوحدةُ 3

نظرة عامة على الوحدة:

تعلـم الطلبـة فيمـا سـبق النسـب المثلثية الأساسـية $(\sin x, \cos x, \tan x)$ فـي المثلـث قائـم الزاويـة، واسـتعملوا المتطابقة الأساسية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ في إيجاد النسـب المثلثية الأساسـية لزاوية حادة إذا عُلمت إحدى هذه النسـب، واسـتعملوا هذه النسب في نمذجة مواقف حياتية تتضمن الحسابات المتعلقة بزوايا الارتفاع والانخفـاض. وهذه الوحدة هي امتداد لهذا التعلم، حيث يجد الطلبة النسـب المثلثية الأساسية، ويحلّون معادلات مثلثية ضمن دورة واحدة؛ أي عندما تكون الزوايا بين $0°$ و $360°$، ويدرسون دائرة الوحدة، والوضع القياسي للزاوية، وزاوية المرجع، وعلاقة هذه المفاهيم بالنسـب المثلثية، وتمثيل الاقترانات المثلثية في المسـتوى الإحداثي يدويًّا، وباسـتعمال برمجيـة جيوجبرا، وتحديـد خصائص هذه الاقترانات كونهـا دورية ويمكن توظيفها في مجموعة من المواقف الحياتية التي تنمذج باستعمالها.

الوحدةُ 3

حسابُ المثلثاتِ
Trigonometry

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ دراسـةُ العلاقاتِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياسـاتِ زواياهُ (أوْ ما يُسمّى علمَ المثلثاتِ) أحدَ أهمِّ فروعِ الرياضياتِ وأقدمِها؛ إذْ سـاعدَ هذا العلـمُ قدمـاءَ المصريينَ على بناءِ الأهراماتِ ودراسـةِ الفَلَكِ، وقدِ استمرَّ الاهتمامُ بهِ حتّى اليومِ؛ فكانَ أساسًـا لكثيرٍ منَ العلومِ الأُخرى.

تعلّمْتُ سابقًا:

- ✓ مفهومَ جيبِ الزاويةِ الحادّةِ، وجيبَ تمامِها، وظلِّها بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ اسـتخدامَ العلاقةِ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ حَـلَّ معادلاتٍ خطِّيـةٍ وتربيعيةٍ ضمـنَ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ ماهيةَ دائرةِ الوحدةِ، ووضعَ الزاويةِ القياسيَّ.
- ◄ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.
- ◄ تمثيلَ الاقتراناتِ المثلثيةِ في المسـتوى الإحداثيِّ، واستنتاجَ خصائصِها.
- ◄ حَلَّ معـادلاتٍ مثلثيةٍ، بحيثُ تكونُ مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

76

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- فهم النسـب المثلثية الأساسـية (الجيب، وجيب التمـام، والظل) فـي المثلث قائم الزاوية.
- إيجاد قياس الزاوية الحادة إذا عُلِمت إحدى نسبها مستعملًا الآلة الحاسبة.
- توظيف النسـب المثلثية الأساسية في حل مثلـث قائم الزاوية ضمـن مواقف رياضية وحياتية متنوعة.
- اسـتنتاج المتطابقـة المثلثيـة الأساسـية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، واستعمالها لإيجاد النسب المثلثية الأساسية.

الصف العاشر

- فهم دائرة الوحدة، وعلاقة إحداثيي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء لزاوية في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة بنسبتي الجيب وجيب التمام للزاوية.
- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا ضمن دورة واحدة $0° \leq \theta \leq 360°$
- تمثيل الاقترانات المثلثية الأساسية بيانيًّا (يدويًّا، وباستعمال التكنولوجيا) ضمن دورة واحدة.
- حـل معـادلات مثلثيـة ضمـن دورة واحـدة $0° \leq \theta \leq 360°$
- نمذجة مواقف حياتية باستعمال النسب والمعادلات المثلثة لإيجاد قياسات لزوايا وأضلاع مجهولة.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

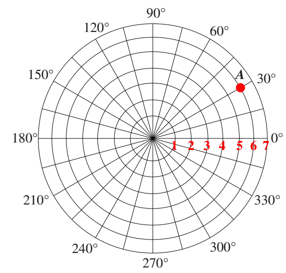
- التحويل بين قياسي الزاوية الدائري والستيني.
- تعرف الاقترانات (القاطع $\sec x$، وقاطع التمام $\operatorname{cosec} x$، وظل تمام $\cot x$).
- تمثيـل الاقترانـات (القاطـع $\sec x$ ، وقاطـع التمـام $\operatorname{cosec} x$، وظـل تمـام $\cot x$) فـي المسـتوى الإحداثـي.
- دراسـة سـلوك الاقتـران المثلثـي تحـت تأثير تحويـلات هندسـية.
- مفهوم المتطابقة المثلثة.
- إثبات صحة متطابقة مثلثية.
- إيجاد الحل العام لمعادلة مثلثية.

مشروع الوحدة

إنشاءُ نظامٍ إحداثيٍّ جديدٍ

فكرةُ المشروعِ إنشاءُ نظامٍ إحداثيٍّ جديدٍ، يعتمدُ البُعْدَ عنْ نقطةٍ مرجعيةٍ، وقياسَ زاويةِ الميلِ على الخطِّ الأفقيِّ.

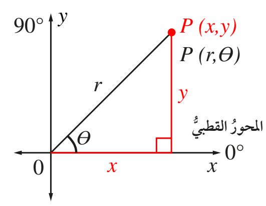
الموادُّ والأدواتُ أوراقٌ، مسطرةٌ، منقلةٌ، فرجارٌ، آلةٌ حاسبةٌ.



نظامُ الإحداثياتِ القطبيةِ: يُمكِنُ تحديدُ موقعِ أيِّ نقطةٍ في المستوى باستعمالِ الزوجِ المُرتَّبِ (r, θ)، حيثُ:

r: بُعْدُ النقطةِ عنْ نقطةٍ مرجعيةٍ تُسمّى القطبَ.

θ: الزاويةُ بينَ الشعاعِ المارِّ بالنقطةِ والقطبِ، والمحورِ القطبيِّ، وهوَ الشعاعُ الأفقيُّ منَ القطبِ باتجاهِ اليمينِ. يُلاحَظُ منَ الشكلِ المجاورِ أنَّ إحداثيَّي النقطةِ A هما: $(6, 30^\circ)$. تُسمّى هذهِ الطريقةُ نظامَ الإحداثياتِ القطبيةِ.



تحويلُ الإحداثياتِ القطبيةِ إلى إحداثياتٍ ديكارتيةٍ: لتحويلِ الإحداثياتِ القطبيةِ إلى إحداثياتٍ ديكارتيةٍ، أرسمُ عمودًا منَ النقطةِ التي يُرادُ تحويلُ إحداثيَّيْها إلى المحورِ الأفقيِّ، ثمَّ أستعملُ النسبَ المثلثيةَ لحسابِ طولَيْ ضلعَيِ المثلثِ الناتجِ، كما في الشكلِ المجاورِ، للحصولِ على الإحداثيَّيْنِ x وَ y لتلكَ النقطةِ. للتحويلِ منَ النظامِ الديكارتيِّ إلى النظامِ القطبيِّ، أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ r وَ θ بطريقةٍ عكسيةٍ، وذلكَ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أستعملُ مسطرةً وفرجارًا لرسمِ نسخةٍ مُكبَّرةٍ للمستوى القطبيِ أعلاهُ، مُحدِّدًا عليْهِ مواقعَ 6 نقاطٍ تمثلُ رؤوسَ سُداسيٍّ منتظمٍ، ثمَّ أَجِدُ إحداثياتِها القطبيةِ (r, θ)، والديكارتيةِ (x, y).
2. أَصِلُ بينَ النقاطِ الستةِ بلونٍ مختلفٍ، ثمَّ أستعملُ قانونَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ لإيجادِ محيطِ الشكلِ السداسيِّ.

عرضُ النتائجِ:

أُصمِّمُ معَ أفرادِ مجموعتي مجلةً أوْ لوحةً تتضمَّنُ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ.
- وصفٌ لتطبيقٍ حياتيٍّ تُستعمَلُ فيهِ الإحداثياتُ القطبيةُ.

77

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار تطبيق علمي أو عملي مناسب لخصائص الدائرة.			
2	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
3	التحقُّق من صحة النموذج والصور والرسومات التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	التقرير المكتوب كامل ومنظم			
5	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
6	عرض معلومة جديدة تعلمتها المجموعة في أثناء بحثها وعملها في المشروع.			
7	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: إنشاء نظام إحداثي جديد

هـدف المشـروع: إثراء معرفـة الطلبة بأنظمـة التمثيل في المسـتوى، عن طريق إنشـاء نظام يعتمد البُعْد عن نقطة مرجعية (القطب)، وقياس زاوية الميل عن المحور الأفقي، والتحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلـى مجموعـات (رباعية، أو خماسـية) غير متجانسة، ثم اطلب إليهم دراسة نظام الإحداثيات القطبية من مشروع الوحدة في كتاب الطالب.
- عيِّـن مُقرِّرًا لكل مجموعة، واطلب إليـه توزيع الأدوار على أفراد المجموعة.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشـروع، مثل: الأدوات الهندسـية (المسطرة، والمنقلة، والفرجار)، وجهاز الحاسـوب، وآلة التصويـر، فضلًا عن بيـان عناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولًا بأول وتعزيزه بالصور المناسبة للموضوع.
- بيِّن للطلبة أن المطلوب من كل مجموعة ما يأتي:
  - » البحـث فـي مصـادر المعرفـة المتاحة عـن موضوع المشروع، بحيث يشمل تطبيقات عملية له، وإعداد تقرير عن نتائج البحث، وتسـليمه نهاية الأسبوع الأول من بدء دراسة الوحدة.
  - » تصميم لوحة من الكرتون وفق خطوات تنفيذ المشـروع تتضمن صورًا لمراحل التنفيذ.
  - » تصميم مُدوَّنة إلكترونية، أو منشور ورقي يتضمن وصف ما قامـت به المجموعـة ونقاشـاتها المتعلقة بموضوع المشـروع، وتلخيص النتائج التي توصَّلت إليها، إضافةً إلى تقرير يتضمن خطوات العمل التفصيلية، مثل: جدول للتحويـل بين الإحداثيين، وتعييـن النقاط في الإحداثي القطبي، والحسابات التي أوجدوها جميعها.
  - » عرض ما انجزته المجموعة في مشـروع الوحدة (يمكن اسـتعمال برمجيـة العـروض التقديميـة (Power Point)، أو أيِّ طريقـة أُخـرى يختارهـا الطلبة) بعد الانتهاء من دراسة الوحدة.

عرض النتائج

- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة اسـتعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشـروع، وإعداد عـرض تقديمي، يحوي صـورًا لمراحـل التنفيذ، واطلـب إلى جميـع أفراد كل مجموعة المشـاركة في عرض جزء من نتائج المشـروع (تكمن أهمية هـذه الخطوات في تعزيز مهـارات الطلبة التكنولوجية، وتعزيز مهاراتهـم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- اطلـب إليهـم تسـجيل تقييمهـم الذاتي لمشـروعهم، والاستعانة بأداة التقييم التالية في ذلك.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

سُلَّم التقدير اللفظي

رقم المجموعة	مستوى الأداء			
اسم الطالب/ الطالبة:	مقبول (1)	جيد (2)	جيد جدًّا (3)	ممتاز (4)
1) 2) 3) 4) 5)	يصف التقرير نظام الإحداثيات القطبية بصورة غير شاملة أو دقيقة.	يصف التقرير نظام الإحداثيات القطبية وصفًا شاملًا، ويوضح التحويل بينه وبين نظام الإحداثيات الديكارتية، ولكنه لا يتضمن كيفية حساب المسافة بين نقطتين.	يصف التقرير نظام الإحداثيات القطبية وصفًا شاملًا يتضمن كيفية حساب المسافة بين نقطتين، ولكنه لا يوضح كيفية التحويل بينه وبين نظام الإحداثيات الديكارتية.	يصف التقرير نظام الإحداثيات القطبية وصفًا شاملًا ودقيقًا يتضمن كيفية حساب المسافة بين نقطتين، ويوضح التحويل بينه وبين نظام الإحداثيات الديكارتية.
	تصميم لوحة المستوى القطبي غير دقيق، ويتضمن أخطاء في تعيين معظم رؤوس السداسي المنتظم.	تصميم لوحة المستوى القطبي متناهي الدقة، ولكن بعض إحداثيات رؤوس السداسي المنتظم عُيِّنت بصورة غير صحيحة، ويوجد خطأ في حساب محيطه.	تصميم لوحة المستوى القطبي متناهي الدقة، وعُيِّنت إحداثيات رؤوس السداسي المنتظم بصورة صحيحة ودقيقة، ولكن يوجد خطأ في حساب محيطه.	تصميم لوحة المستوى القطبي متناهي الدقة، ويوضح إحداثيات رؤوس السداسي المنتظم وكيفية إيجاد محيطه بصورة صحيحة.
	تصميم المُدوَّنة/ المنشور غير جاذب، ولا يقدم ملخصًا شاملًا لعمل المجموعة، ويتضمن معلومات رياضية فيها أخطاء عن نظام الإحداثيات القطبية.	تصميم المُدوَّنة/ المنشور جاذب، ويقدم ملخصًا شاملًا لعمل المجموعة، ولكنه يتضمن معلومات رياضية فيها أخطاء علمية عن نظام الإحداثيات القطبية.	تصميم المُدوَّنة/ المنشور جاذب، ولكنه يقدم ملخصًا شاملًا لعمل المجموعة، ويتضمن معلومات رياضية صحيحة عن نظام الإحداثيات القطبية.	تصميم المُدوَّنة/ المنشور جاذب، ويقدم ملخصًا شاملًا لعمل المجموعة، ويتضمن معلومات رياضية صحيحة عن نظام الإحداثيات القطبية.
	تم عرض ما أنجزته المجموعة، وقد تضمن العرض تطبيقات عملية وحياتية أجريت خلالها حسابات شابتها الكثير من الأخطاء العلمية.	تم عرض ما أنجزته المجموعة، وقد تضمن العرض تطبيقات عملية وحياتية أجريت خلالها حسابات شابتها بعض الأخطاء العلمية.	تم عرض ما أنجزته المجموعة، وقد تضمن العرض تطبيقات عملية وحياتية أجريت خلالها حسابات صحيحة علميًّا.	تم عرض ما أنجزته المجموعة بطريقة شائقة، وقد تضمن العرض تطبيقات عملية وحياتية أجريت خلالها حسابات صحيحة علميًّا.
	شارك بعض أفراد المجموعة في إنجاز مهام مشروع الوحدة.	شارك معظم أفراد المجموعة في إنجاز مهام مشروع الوحدة.	شارك معظم أفراد المجموعة في إنجاز مهام مشروع الوحدة بكفاءة عالية.	شارك جميع أفراد المجموعة في إنجاز مهام مشروع الوحدة بكفاءة عالية.

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

ملحوظة: يمكن تعديل وصف مؤشرات الأداء بالطريقة التي يراها المعلِّم مناسبة.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين للتأكد أن الطلبة أتقنوا المعرفة والمهارات السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: استعمال نظرية فيثاغورس في المثلث قائم الزاوية وحساب النسب المثلثية لزواياه، وتمثيل اقترانات خطية وتربيعية بيانيًّا، وحل معادلات خطية، وحل معادلات تربيعية باستعمال التحليل والقانون العام.
- اطلب إلى الطلبة حل الأسئلة في عمود (أختبر معلوماتي) بوصفه اختبارًا تشخيصيًّا، وتجوَّل بينهم في هذه الأثناء، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على دراسة المثال المقابل للسؤال في عمود (مراجعة). إذا لم تساعد دراسة المثال المحلول هؤلاء الطلبة، فاطلب إلى الجميع التوقف عن حل الأسئلة، واشرح المثال أو المثال المكافئ له على اللوح مع طلبة الصف كافة.
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح أحد حلول الطلبة غير الصحيحة -من دون ذكر اسم الطالب-، وأدر نقاشًا عنه؛ بهدف معالجة أخطاء الطلبة، وتهيئتهم قبل البدء بدراسة الوحدة، واختر أسئلة أُخرى إن لزم الأمر.
- ذكِّر الطلبة بمفهوم حل المعادلة، وبطرائق حل المعادلات الخطية، ثم المعادلات التربيعية عن طريق مناقشة السؤال الآتي:

» حل المعادلات الآتية:

1. $7x - 12 = 3x + 5$
2. $3(2x+4) = 18$
3. $5x^2 - 3x = 0$
4. $x^2 + 20 = 12x$
5. $4x^2 + x - 1 = 0$
6. $2x^2 + 4x - 6 = 0$

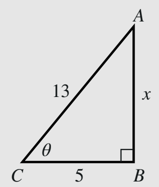
الوحدةُ 3: حسابُ المثلثاتِ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

مراجعةٌ

أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ:



نظريةُ فيثاغورس	$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$
بالتعويضِ	$13^2 = 5^2 + AB^2$
بالتبسيطِ	$169 = 25 + AB^2$
بطرحِ 25	$169 - 25 = AB^2$
بالتبسيطِ	$144 = AB^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$12 = AB$

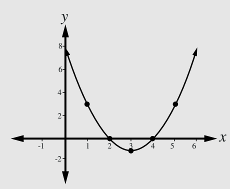
$$\sin\theta = \frac{12}{13},\ \cos\theta = \frac{5}{13},\ \tan\theta = \frac{12}{5}$$

أُمثِّلُ الاقترانَ الآتيَ: $y = x^2 - 6x + 8$ في المستوى الإحداثيِّ:

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ كالآتي.

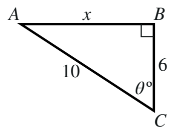
x	1	2	3	4	5
y	3	0	–1	0	3
(x, y)	(1, 3)	(2, 0)	(3, –1)	(4, 0)	(5, 3)

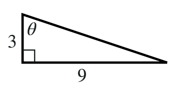
الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بيْنَها بمنحنًى.



أختبرُ معلوماتي

أَجِدُ قيمةَ x في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ:

1. 

2. 

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي في المستوى الإحداثيِّ:

3. $y = 2x + 3$
4. $y = 4 - 3x$
5. $y + x = 10$
6. $y = x^2$
7. $y = 3x - x^2$
8. $y = x^2 - 2x - 3$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:

9. $2x + 3 = 11$
10. $5x - 4 = 10 - 2x$
11. $3x^2 - 12x = 0$
12. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

17

إرشادات للمعلم

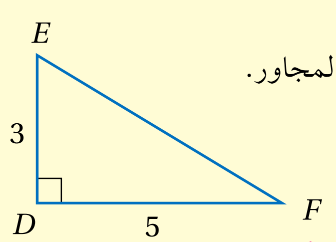
إذا واجه الطلبة صعوبة في حل السؤالين: الأول، والثاني:

- ذكِّرهم بالنسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة، وهي:

$$\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

- ثم حل معهم السؤال الآتي:

جد النسب المثلثية الأساسية للزاوية F في الشكل المجاور.



$EF = \sqrt{34}$

$$\sin F = \frac{3}{\sqrt{34}} \ , \quad \cos F = \frac{5}{\sqrt{34}} \ , \ \tan F = \frac{3}{5}$$

الدرس 1

النسبُ المثلثيةُ
Trigonometric Ratios

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الوضعِ القياسيِّ للزاويةِ، وربطُ النسبِ المثلثيةِ بدائرةِ الوحدةِ، وإيجادُها للزوايا الربعيةِ، وإيجادُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في حالِ معرفةِ إحدى النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ.

المصطلحاتُ ضلعُ الابتداءِ، ضلعُ الانتهاءِ، الوضعُ القياسيُّ، دائرةُ الوحدةِ، الزاويةُ الربعيةُ.

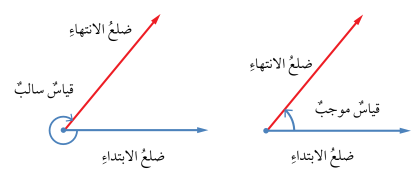
مسألةُ اليومِ تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ النسبِ المثلثيةِ لزوايا حادَّةٍ، مثلِ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ. ولكنْ، كيفَ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ أكبرَ منْ 90°، مثلِ الزاويةِ بينَ شفراتِ مروحةِ توليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ؟

الزاويةُ هيَ اتحادُ شعاعيْنِ لهُما نقطةُ البدايةِ نفسُها. والنقطةُ المشتركةُ تُعرَفُ برأسِ الزاويةِ، أمّا الشعاعانِ فيُسمّى أحدُهُما **ضلعَ الابتداءِ** (initial side)، والآخرُ **ضلعَ الانتهاءِ** (terminal side). يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدُهُما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الابتداءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الابتداءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

إرشادٌ

اتِّجاهُ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

عكسُ حركةِ عقاربِ الساعةِ.



تكونُ الزاويةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0, 0)$، وضلعُ ابتدائِها مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرف الوضع القياسي للزاوية.
- تعرف دائرة الوحـدة، وربط النسـب المثلثية بدائرة الوحدة، وإيجادها للزوايا الربعية.
- إيجاد النسبتين الأساسيتين المثلثتين الباقيتين في حال معرفة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية.

التعلم القبلي:

- مفهوم الزاوية وعناصرها.
- استعمال المنقلة لقياس الزوايا.
- النسب المثلثية الأساسية في مثلث قائم الزاوية.

1 التهيئة

- ارسم على اللوح مجموعة من الزوايا (حادة، منفرجة، منعكسة، مستقيمة)، وذكِّر الطلبة بمفهوم الزاوية.
- اسـتعمل المنقلة لقياس كل زاوية، مُميِّزًا بين القياس الموجب والقياس السالب للزاوية.
- ذكِّر الطلبة بالنسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة، ثم اسـألهم: ما أكبر قيمة لنسبة جيب الزاوية الحادة؟ ما أصغر قيمة؟ ثم كرِّر السؤال عن نسبة جيب التمام.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يسـتطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، وامنحهم دقيقة لذلك.
- ارسم على اللوح الزاوية بين شفرات مروحة توليد الطاقة الكهربائية بصورة تقريبية.
- ارسم مثلثًا يحوي زاوية قياسها 120، ثم اسأل الطلبة:
  » كيف يمكن إيجاد النسب المثلثية لهذه الزاوية؟
  » أي ضلع هو الوتر في هذا المثلث؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

3 التدريس

- ارسم على اللوح مجموعة من الزوايا في المستوى الإحداثي، ووضح للطلبة كيف تكون الزاوية في الوضع القياسي.
- اطلب إلى الطلبة تدوين الشروط اللازمة لتكون الزاوية في الوضع القياسي في دفاترهم.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يوضح حالة لزاوية في الوضع غير القياسي، وحالة أُخرى لزاوية في الوضع القياسي.
- اسأل الطلبة عن الشروط الواجب توافرها لتكون الزاوية في الوضع القياسي.
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وبذلك تعزز لديهم المهارات الشخصية: التواصل، والتعبير عن الرأي، والتفكير الناقد.

- وضح للطلبة أن الزاوية angle المرسومة في المستوى الإحداثي coordinates plane تكون بالوضع القياسي standard position عند تحقق شرطين معًا: رأس الزاوية vertex في نقطة الأصل origin، وضلع الابتداء initial side لها منطبق على المحور x (x−axis).
- وضح للطلبة أنه لا علاقة لموضع ضلع الانتهاء terminal side للزاوية بكونها في الوضع القياسي أو غير ذلك، وذكِّر بالقياس الموجب (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة)، والقياس السالب (اتجاه حركة عقارب الساعة) للزاوية.
- اسأل الطلبة عن تقدير قياس الزاوية في كل فرع، وكيف قدَّروا القياس.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

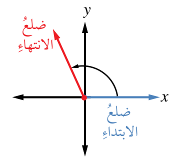
التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

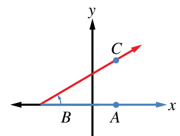
ملاحظات المعلم

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخلط بعض الطلبة بين ضلع الابتداء وضلع الانتهاء للزاوية؛ لذا أكِّد لهم أن ضلع الابتداء هو الضلع الذي نبدأ منه قياس الزاوية.
- قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في قياس الزوايا بالقراءة الموجبة والقراءة السالبة باستعمال المنقلة؛ لذا ركِّز على مهارة تثبيت مركز المنقلة عند رأس الزاوية وخط الصفر على ضلع الابتداء. وإذا تحرك عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فإن ضلع الانتهاء سيشير إلى القراءة الموجبة للزاوية، وإذا تحرك باتجاه حركة عقارب الساعة، فإن ضلع الانتهاء سيشير إلى القراءة السالبة للزاوية.



زاويةٌ في الوضعِ القياسيِّ.



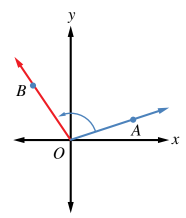
زاويةٌ في الوضعِ غيرِ القياسيِّ.

مثال 1

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أَمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

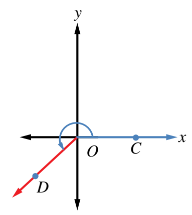
1

الزاويــةُ AOB ليسَــتْ في وضعٍ قياســيٍّ؛ لأنَّ ضلــعَ ابتدائِها لا ينطبــقُ على محورِ x الموجبِ.



2

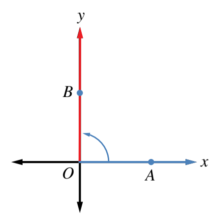
الزاويةُ COD في وضعٍ قياســيٍّ؛ لأنَّ ضلعَ ابتدائِهــا ينطبقُ علــى محــورِ x الموجبِ، ورأسُها على نقطةِ الأصلِ O.



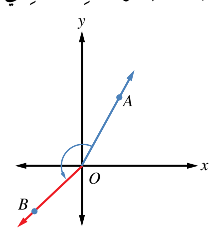
أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أَمْ لا، مُبيِّنًا السببَ: انظر الهامش

1



2



إرشادات للمعلم

- اســتعمل لوحًا متحركًا (إن توافر) مرسوم عليه نظام المحاور الإحداثيــة المتعامدة عند تقديم الزوايا في الوضع القياسي.
- إذا توافر لديك جهاز حاســوب وجهاز عرض، فيمكنك توظيف برمجية جيوجبرا لرســم زوايا في الوضع القياسي، وتوضيح القراءة الموجبة والقراءة السالبة لقياسها.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

1) الزاوية فــي الوضع القياســي؛ لأن رأســها في نقطة الأصل، وضلع الابتداء منطبق على المحور x.

2) الزاوية ليســت في الوضع القياسي؛ لأن ضلع الابتداء غير منطبق على المحور x.

- وضِّح للطلبة مفهوم الدورة الكاملة، وأنه إذا دار ضلع انتهاء الزاوية عكس اتجاه حركة عقارب الساعة أكثر من دورة كاملة، فإنه تنتج زاوية ذات قراءة موجبة تكافئ زاوية يقع قياسها بين $0°$ و $360°$.

مثال 2

- ناقِش على اللوح المثال 2 الذي يبين كيفية رسم زاوية في الوضع القياسي عندما يكون قياسها أقل أو أكبر من $360°$ أو أكبر منها.
- وضح للطلبة خطوات منظمة لرسم زاوية معطى قياسها في المستوى الإحداثي بالوضع القياسي للزاوية.
- أكِّد أنه إذا كان القياس المعطى للزاوية المراد رسمها بالوضع القياسي أكبر من $360°$، فإننا نطرح مضاعفًا مناسبًا لقياس الدورة الواحدة الكاملة من القياس المعطى للحصول على قياس يقع بين $0°$ و $360°$، وعند رسم الزاوية يراعى عدد الدورات وفق المضاعف المُحدَّد.
- اطلب إلى الطلبة في كل مرة تحديد الربع quadrant الذي رُسِم فيه ضلع الانتهاء.

إرشادات للمعلم

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في رسم الزوايا التي هي أكبر من 540، وأقل من 720، فيرسمون ضلع انتهائها في الربع الثاني؛ لذا نبِّههم على ضرورة وضع المنقلة بصورة صحيحة عند رسم الزاوية. يمكنك توزيع الطلبة إلى مجموعات متجانسة، وتوزيع الطلبة الذين أتقنوا الرسم على المجموعات ليعينوا زملاءهم.

مثال إضافي

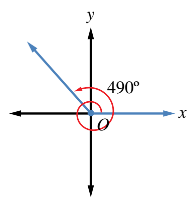
- ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسي:

1 $490°$

2 $560°$

3 $670°$

إذا دارَ ضلعُ زاويةٍ في الوضعِ القياسيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها بينَ $0°$ وَ $360°$. وإذا استمرَّ في دورانِهِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها أكبرُ منْ $360°$.

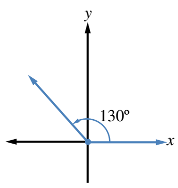


مثال 2

أرسمُ في الوضعِ القياسيِّ الزاويةَ المعطى قياسُها في ما يأتي، مُحدِّدًا مكانَها:

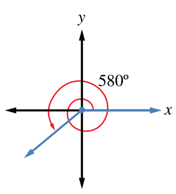
1 $130°$

أرسمُ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، ومنْ نقطةِ الأصلِ أرسمُ ضلعَ الابتداءِ مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أضعُ مركزَ المنقلةِ على نقطةِ الأصلِ، وتدريجَ المنقلةِ $0°$ على ضلعِ الابتداءِ، ثمَّ أُعيِّنُ نقطةً مقابلَ التدريجِ $130°$. بعدَ ذلكَ أرسمُ ضلعَ الانتهاءِ منْ نقطةِ الأصلِ إلى النقطةِ التي عيَّنْتُها، فأجدُ أنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ يقعُ في الربعِ الثاني.



2 $580°$

بما أنَّ $580° = 360° + 220°$، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ $580°$ هوَ نفسُهُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ $220°$ الذي يقعُ في الربعِ الثالثِ.



إرشادٌ

المنقلةُ ذاتُ شكلِ نصفِ الدائرةِ لها تدريجانِ متعاكسانِ، يبدأُ كلٌّ منْهُما منْ $0°$، وينتهي عندَ $180°$؛ لذا يجبُ دائمًا وضعُ التدريجِ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ عندَ قياسِها، أوْ رسمِها.

أتحقق من فهمي

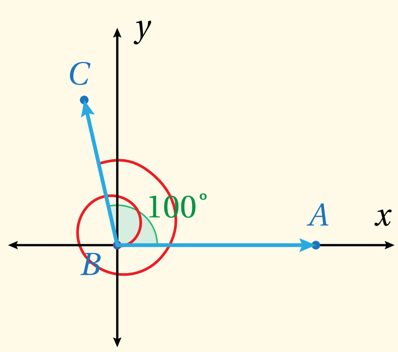
أرسمُ زاويةً قياسُها $460°$ في الوضعِ القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانَها. انظر الهامش

80

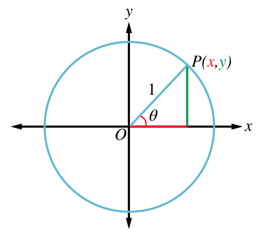
إجابة أتحقق من فهمي 2:

$460° = 360° + 100°$

وعليه، فإن ضلع الانتهاء سيظهر في الربع الثاني.



دائرةُ الوحدةِ (unit circle) هيَ دائرةٌ مركزُها نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطرِها وحدةٌ واحدةٌ. إذا رُسِمَتِ الزاويةُ θ في الوضعِ القياسيِّ، فإنَّ ضلعَ انتهائِها يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ وحيدةٍ هيَ $P(x, y)$. ومعَ تغيُّرِ قياسِ الزاويةِ يتغيَّرُ موقعُ النقطةِ P على الدائرةِ، ويتغيَّرُ إحداثيّاها.



يُمكِنُ تعريفُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ θ بدلالةِ إحداثيَّيْ P كما يأتي:

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{x}{1} = x \qquad \sin\theta = \frac{\text{المُقابِلُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المُقابِلُ}}{\text{المجاورُ}} = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $\sin\theta$ على نسبةِ جيبِ الزاويةِ θ، والرمزُ $\cos\theta$ على نسبةِ جيبِ التمامِ، والرمزُ $\tan\theta$ على نسبةِ ظلِّ الزاويةِ θ.

إرشادٌ

النسبُ المثلثيةُ الأساسيةُ للزاويةِ θ هيَ: $\sin\theta$، $\cos\theta$، وَ $\tan\theta$.

مثال 3

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ الواردةِ في ما يأتي:

1) $P(-0.6, 0.8)$

$$\sin\theta = y = 0.8, \quad \cos\theta = x = -0.6, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$$\sin\theta = y = -\frac{12}{13}, \quad \cos\theta = x = \frac{5}{13}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ النقطةِ $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. انظر الهامش

إجابة أتحقق من فهمي 3:

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \tan\theta = 1$$

وضلع الانتهاء للزاوية يقع في الربع الثالث.

مثال 3

- ابدأ برسم دائرة في المستوى الإحداثي بحيث يكون مركزها في نقطة الأصل، ثم عرِّف دائرة الوحدة unit circle.
- ارسم الزاوية θ بالوضع القياسي في الربع الأول، بحيث يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في نقطة مثل P، وذكِّر الطلبة بأن الزاوية الحادة تسمى acute، وعرِّف النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ بدلالة إحداثيي $P(x, y)$، ليستنتجوا أن $P(\cos\theta, \text{sine}\ \theta)$.
- ناقِش الطلبة في حل المثال 3، ثم اطلب إليهم -في كل فرع- تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية في دائرة الوحدة قبل رسمها، ثم تبرير إجاباتهم.

! أخطاء مفاهيمية:

قد يخطىء بعض الطلبة في الإشارة الموجبة أو السالبة عند قسمة $\sin x$ على $\cos x$ للحصول على $\tan x$؛ لذا ذكِّر الطلبة بحقائق الضرب والقسمة للأعداد الحقيقية.

تنويع التعليم:

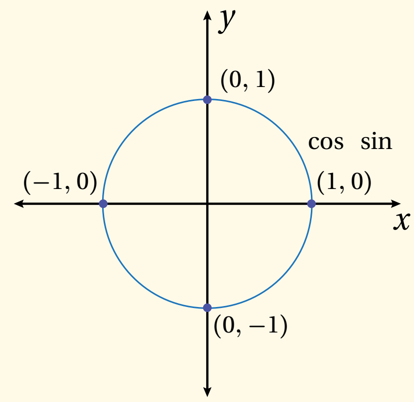
- وجِّه الطلبة إلى إشارات الأعداد على المحورين الإحداثيين؛ لتحديد إشارات $\sin x$ و $\cos x$ في الأرباع المختلفة، بحيث ترتبط إشارة $\cos x$ بإشارة الأعداد على المحور الأفقي x، وترتبط إشارة $\sin x$ بإشارة الأعداد على المحور الرأسي y.
- وجِّه الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل السؤال الآتي:

النقطة P تمثل نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع دائرة الوحدة.

إذا كان $\sin\theta = -0.8$, $\cos\theta = 0.6$، فجد إحداثيات النقطة P، ثم حدِّد الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية.

مثال 4

- عـرِّف الزاوية الربعيــة quadrantile angle بأنها الزاوية في الوضع القياســي التي ينطبق ضلع انتهائها على أحد المحورين الإحداثيين، وأنها تحديدًا الزوايا التي قياساتها: $0°\ (360°), 90°, 180°, 270°$.
- اربــط كل زاوية ربعية بإحداثيــي النقطة p على دائرة الوحدة، ليسهل على الطلبة تذكُّر النسب المثلثية لهذه الزوايا:



$(\cos 0°, \sin 0°) \rightarrow P(1, 0)$
$(\cos 90°, \sin 90°) \rightarrow P(0, 1)$
$(\cos 180°, \sin 180°) \rightarrow P(-1,0)$
$(\cos 270°, \sin 270°) \rightarrow P(0, -1)$

- ناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يبين حساب النسب المثلثية لإحدى الزوايا الربعيــة، مُبيِّنًا أن الإحداثي x لنقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية الربعية هو جيب تمام الزاوية، وأن الإحداثي y هو جيب الزاوية.

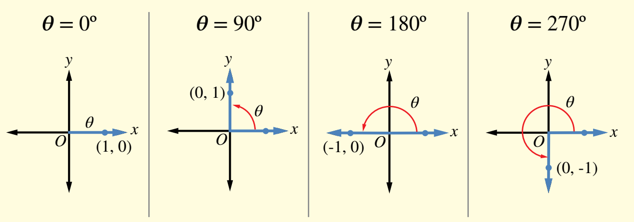
إرشادات للمعلم

الاختصار u.d يعني undefined؛ أي غير مُعرَّف.

عندَ رسمِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ، قدْ يقعُ ضلعُ انتهائِها في أحدِ الأرباعِ الأربعةِ، فيقالُ عندئذٍ إنَّ الزاويةَ θ واقعةٌ في الربعِ كذا، وقدْ ينطبقُ ضلعُ انتهائِها على أحدِ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، فتُسمّى الزاويةُ θ في هذهِ الحالةِ **زاويةً ربعيةً** (quadrantal angle).

مفهومٌ أساسيٌّ

الزوايا الربعيةُ في دائرةِ الوحدةِ:



يُمكِنُ تحديدُ النسبِ المثلثيةِ للزوايا الربعيةِ منْ إحداثياتِ نقاطِ تقاطعِ دائرةِ الوحدةِ معَ المحوريْنِ الإحداثييْنِ. فمثلًا، يتقاطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ $90°$ في الوضعِ القياسيِّ معَ دائرةِ الوحدةِ في النقطةِ $P(0, 1)$. وبذلكَ، فإنَّ: $\sin 90° = 1$، $\cos 90° = 0$، ويكونُ $\tan 90°$ غيرَ مُعرَّفٍ لأنَّهُ لا تجوزُ القسمةُ على صفرٍ.

أُفكِّرُ

هلْ سيتغيَّرُ $\sin 90°$ لوْ رُسِمَتِ الزاويةُ في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها لا يساوي وحدةً واحدةً؟

مثال 4

أينَ يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُها $180°$ دائرةَ الوحدةِ إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ؟ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ لها.

يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُها $180°$ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $C(-1, 0)$، إذنْ:

$$\sin 180° = y = 0, \quad \cos 180° = x = -1, \quad \tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتحققُ من فهمي

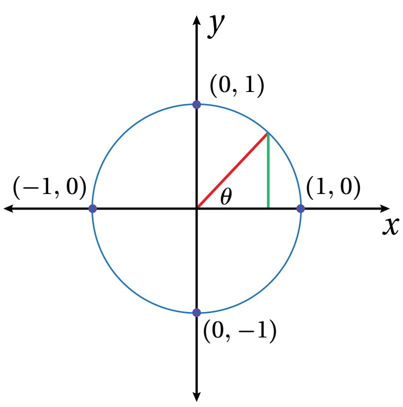
انظر الهامش

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويتيْنِ اللتيْنِ قياسُ كلٍّ منْهُما $270°$، وَ $360°$ على الترتيبِ.

82

! أخطاء مفاهيمية:

يخطئ بعض الطلبة في تحديد النسب المثلثية للزوايا الربعية، فيربطون نسبة الجيب مع المحور x، ونسبة جيب التمام مع المحور y؛ لذا ذكِّرهم أن المحور x يرتبط بالضلع المجاور للزاوية في وضعها القياسي، وأن المحور y يرتبط بالضلع المقابل لها، ودرِّبهم على تخيل الرسم في كل مرة.

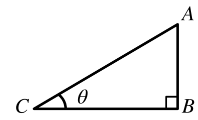


إجابة أتحقق من فهمي 4:

$\sin 270° = -1, \cos 270° = 0, \tan 270°\ u.d.$

$\sin 360° = 0, \cos 360° = 1, \tan 360° = 0$

إذا كانَتْ θ زاويةً حادَّةً، فإنَّهُ يُمْكِنُ رسمُ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ تكونُ θ إحدى زواياهُ.



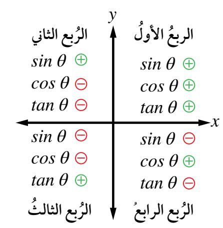
نظريةُ فيثاغورس $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

بقسمةِ الطرفيْنِ على $(AC)^2$ $\quad \dfrac{(BC)^2}{(AC)^2} + \dfrac{(AB)^2}{(AC)^2} = \dfrac{(AC)^2}{(AC)^2}$

بتطبيقِ قوانينِ الأسسِ $\quad \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

بالتعويضِ $\quad (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

تظلُّ هذهِ النتيجةُ صحيحةً بقطعِ النظرِ عنْ قياسِ الزاويةِ θ، وهيَ تُستعمَلُ لإيجادِ إحدى هاتيْنِ النسبتيْنِ إذا عُلِمَتِ الأُخرى ولكن يجبُ مراعاةُ إشاراتِ النسبِ المثلثيةِ؛ فهيَ تختلفُ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ في الوضعِ القياسيِّ كما هوَ مُوضَّحٌ في الشكلِ المجاورِ.



مثال 5

أَجِدُ قيمةَ النسبتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ إذا كانَ:

1) $\sin\theta = -\dfrac{1}{5}$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثالثِ.

نتيجةٌ لنظريةِ فيثاغورس $\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$ $\quad \cos^2\theta + \left(\dfrac{-1}{5}\right)^2 = 1$

بطرحِ $\dfrac{1}{25}$ منَ الطرفيْنِ $\quad \cos^2\theta = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $\quad \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

في الربعِ الثالثِ يكونُ $\cos\theta$ سالبًا $\quad \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

83

- ناقِش الطلبة في حل المثال 5 الذي يوضح استعمال المتطابقة المثلثية الأساسية في إيجاد باقي النسب المثلثية لزاوية ما إذا عُلِمت إحدى هذه النسب، وركِّز في الفرع 1 على خطوة أخذ الجذر التربيعي للطرفين، وأهمية كتابة $\pm$ لقيمة النسبة المثلثية، مُبيِّنًا أن اختيار القيمة الموجبة أو القيمة السالبة للنسبة المثلثية يعتمد على تحديد إشارتها حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية.
- في الفرع 2، ركِّز على خطوة استبدال $\sin x$ بدلالة $\cos x$ (أو العكس) قبل استعمال المتطابقة المثلثية الأساسية، وأكِّد وجوب تنفيذ هذه الخطوة عندما يكون المعطى هو $\tan x$.

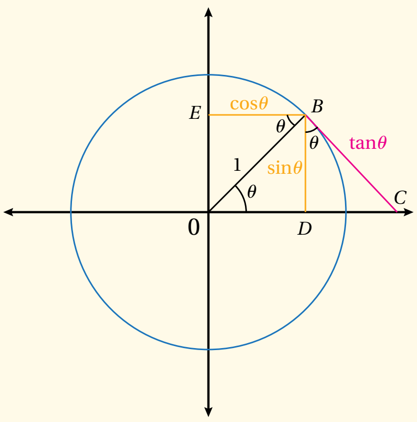
تنويع التعليم:

استعمل الاختصار ASTC لمساعدة الطلبة على تذكُّر إشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع الأربعة؛ إذ ترمز حروف هذا الاختصار إلى النسبة / النسب الموجبة في كل ربع على الترتيب، بدءًا بالربع الأول:

(All, Sine, Tangent, Cosine)

مثال 5

- ارسم الشكل الآتي (من دون كتابة النسب المثلثية الأساسية عليه) باستعمال أقلام ملونة، ثم اطلب إلى الطلبة تحديدها، وناقِشهم في الإجابات. إذا توافر جهاز حاسوب داخل غرفة الصف، أو تمكَّنت من تقديم الدرس في مختبر الحاسوب، فارسم الشكل باستعمال برمجية جيوجبرا.



- حرِّك موقع النقطة B إلى الربع الثاني، ووضِّح للطلبة أن الزاوية θ تصبح منفرجة obtuse، ثم اسألهم:
- ما إشارة كلٍّ من الإحداثي x والإحداثي y للنقطة؟ سالب، موجب.
- هل تتوقع أن تكون جميع قيم النسب المثلثية للزاوية موجبة؟ لماذا؟ لا، ستتنوع إجابات الطلبة.
- ما دلالة الإشارة السالبة للإحداثي x؟ النسب المثلثية $\cos\theta$ و $\tan\theta$ ستكون سالبة، في حين يكون $\sin\theta$ موجبًا.
- استمع لإجابات الطلبة، ثم اسألهم كل مرة:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أُخرى؟
  - » اذكرها.
- كرِّر الأسئلة السابقة بعد تحريك موقع النقطة B إلى الربع الثالث، ووضِّح للطلبة أن قياس الزاوية θ يقع بين $180°$ و $270°$، ثم حرِّك موقع النقطة B إلى الربع الرابع، مُبيِّنًا أن قياس الزاوية θ يقع بين $270°$ و $360°$.
- استعمل نظرية فيثاغورس للتوصُّل إلى المتطابقة المثلثية الأساسية Identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، في دائرة الوحدة.

✓ إرشـاد: وجِّه الطلبـة إلى اسـتعمال الرمز ≈ للدلالة على تقريب النواتج عند اسـتعمال الآلة الحاسبة.

تنويع التعليم

يمكن الاسـتعانة بوسـيلة تعليمية يُعِدُّهـا المعلِّم، وهي لوح من الكرتون رُسِـم عليه دائرة الوحدة في المسـتوى الإحداثي، ومسـطرة (تمثل ضلع انتهـاء الزاوية θ)، تُثبَّت على أحـد طرفيها خيط صوف حر، وعلـى طرفها الآخر دبوس في نقطـة الأصل (رأس الزاوية). ثـم يبدأ المعلِّم بتحريك المسـطرة بدءًا من ضلع ابتداء الزاوية، ويسـأل الطلبـة عن أثر ازدياد قياس الزاويـة في كل من الضلعين: المجاور، والمقابل (خيط الصوف)، لاسـتنتاج إشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع الأربعة.

المفاهيم العابرة:

بعـد الانتهاء من حـل المثـال 5، عزِّز الوعـي **بالقضايا الإنسـانية (تقدير العلم والعلماء)** عـن طريق حوار تديره مـع الطلبة عن دور العالِم البتاني في تطوير علم المثلثات، وتوجيههم إلى البحث في مصادر المعرفة المتاحة، وإعداد تقرير بإسهاماته في تطور هذا العلم، وتضمينه أسماء علماء آخرين كان لهم دور بارز مثله، مُؤكِّدًا ضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسـائل)، ثم اطلـب إليهم حل المسـائل فيها. يمكـن اختيار الأسئلة ذات الأرقام الزوجية لحلها في الصف ضمن مجموعات.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أي مسـألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

---

2 $\tan\theta = -3.5$ ، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثاني.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

بالتعويضِ: $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -3.5$

بضربِ الطرفيْنِ في $\cos\theta$: $\sin\theta = -3.5\cos\theta$

نتيجةً لنظريةِ فيثاغورس: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$: $\cos^2\theta + (-3.5\cos\theta)^2 = 1$

بالتربيعِ: $\cos^2\theta + 12.25\cos^2\theta = 1$

بالتبسيطِ: $13.25\cos^2\theta = 1$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 13.25: $\cos^2\theta = \frac{1}{13.25}$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ: $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{13.25}} \approx \pm 0.2747$

في الربعِ الثاني يكونُ $\cos\theta$ سالبًا: $\cos\theta = -0.2747$

بتعويضِ قيمةِ $\cos\theta$: $\sin\theta = -3.5 \times -0.2747$

$$= 0.96145 \approx 0.96$$

برعَ عالِمُ الفَلَكِ والرياضياتِ المُسْلِمُ محمدُ بنُ جابرٍ البتانيُّ في علمِ المثلثاتِ، واكتشفَ العديدَ منَ العلاقاتِ المُهمَّةِ عنِ النسبِ المثلثيةِ، مثلَ:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ $\sin\theta$ وَ $\tan\theta$ إذا كانَ $\cos\theta = 0.8$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الرابعِ. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ: 1–4 انظر ملحق الإجابات

1) 225°　2) 160°　3) 330°　4) 240°

أُحدِّدُ الربعَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي إذا رُسِمَت في الوضعِ القياسيِّ:

5) 285° الربع الرابع　6) 75° الربع الأول　7) 100° الربع الثاني　8) 265° الربع الثالث

إجابة أتحقق من فهمي 5:

$$(\sin x)^2 + (0.8)^2 = 1$$
$$(\sin x)^2 = 1 - 0.64 = 0.36$$
$$\sin x = \pm 0.6$$

ولأن ضلع انتهاء الزاوية في الربع الرابع؛ فإن:

$$\sin x = -0.6$$
$$\tan x = \frac{-0.6}{0.8} = -0.75$$

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

12) $\sin\theta < 0$ و $\cos\theta < 0$ — الربع الثالث
11) $\tan\theta < 0$ — الربع الثاني، والربع الرابع
10) $\cos\theta > 0$ — الربع الأول، والربع الرابع
9) $\sin\theta > 0$ — الربع الأول، والربع الثاني

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

16) $\tan\theta = -1$ — الربع الثاني، والربع الرابع
15) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ — الربع الثاني، والربع الثالث
14) $\tan\theta = 2$ — الربع الأول، والربع الثالث
13) $\sin\theta = -0.7$ — الربع الثالث، والربع الرابع
20) $\tan\theta = -4, \sin\theta > 0$ — الربع الثاني
19) $\sin\theta = 0.3, \cos < 0$ — الربع الثاني
18) $\sin\theta = 0.55$ — الربع الأول، والربع الثاني
17) $\cos\theta = 0.45$ — الربع الأول، والربع الرابع

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:
21–24 انظر ملحق الإجابات

24) $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$
23) $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$
22) $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$
21) $P(0, -1)$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ: 25–28 انظر ملحق الإجابات

26) $\tan\theta = 0.78\,, \quad -1 < \sin\theta < 0$
25) $\sin\theta = \frac{3}{4}\,, \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ$
28) $\sin\theta = -0.87\,, \quad 270^\circ < \theta < 360^\circ$
27) $\cos\theta = -0.75\,, \quad \tan\theta < 0$

مهارات التفكير العليا 29–31 انظر ملحق الإجابات

29) **تبرير:** ما أكبرُ قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغرُ قيمةٍ لهُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

30) **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ أمجدَ وزينةَ المسألةَ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$، وكانَتْ x بينَ 180° وَ 360°، فما قيمةُ $\sin x + \cos x$؟

أمجدُ:
$\sin x + \cos x = 0.2$

زينةُ:
$\sin x + \cos x = -1.4$

أُحدِّدُ أيُّهما كانَتْ إجابتُهُ صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

31) **تحدٍّ:** أَجِدُ مجموعةَ قيمِ θ التي تجعلُ المتباينةَ الآتيةَ صحيحةً، علمًا بأنَّ $90^\circ < \theta < 180^\circ$:
$\cos\theta + \sin\theta < 0$

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة – ضمن مجموعات ثنائية غير متجانسة – إلى حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، وذكِّر كل مجموعة بكتابة مبرر للإجابة التي توصَّلوا لها، وامنح طلبة الصف وقتًا كافيًا لنقد مبررات زملائهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 18 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

5 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة تبرير إجابتهم للسؤال 29 عن طريق الرسم، أو إعداد وسيلة أو نموذج يبين أكبر قيمة لنسبة جيب الزاوية وأصغر قيمة له، ثم اعرضه أمام الزملاء.

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى بدء تنفيذ الخطوة الأولى من المشروع، ورسم نسخة مكبرة للمستوى القطبي على لوحة كرتون، باستعمال المسطرة والفرجار، ثم تعيين 6 نقاط تمثل رؤوس سداسي منتظم، مُذكِّرًا إيّاهم أن السداسي المنتظم هو مضلع تساوت جميع أطوال أضلاعه، وجميع قياسات زواياه.
- ذكِّر الطلبة بأن عليهم تسليم تقرير (نهاية الأسبوع) بحيث يتضمن نتائج بحثهم في شبكة الإنترنت عن نظام الإحداثيات القطبية وتطبيقاته العملية، وأن للتقرير العلمي مواصفات، أهمها: وجود صفحة لعنوان التقرير وأسماء المعدين، ووجود فهرس للعناوين الفرعية، والدقة العلمية، وسلامة اللغة، والإيجاز، والوضوح، وتوثيق المصادر.

6 الختام

اطلب إلى الطلبة في نهاية الدرس تلخيص ما تعلموه بعباراتهم الخاصة، ثم اطلب إلى كلٍّ منهم اختيار موضوع من الدرس أتقنه، وكتابة سؤال عنه، وموضوع يحتاج إلى مزيد من التمرين لإتقانه، وكتابة سؤال عنه.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- إيجاد النسب المثلثية الأساسية لزاوية بين $0°$ و $360°$
- إيجاد الزاوية إذا عُلمت إحدى نسبها المثلثية باستعمال الآلة الحاسبة، أو الزوايا الخاصة.

التعلم القبلي:

- علاقة إحداثيي نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية بدائرة الوحدة مع النسب المثلثية للزاوية.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد نسبة مثلثية أساسية لزاوية حادة.

1 التهيئة

- ارسم دائرة الوحدة، وارسم زاوية θ بالوضع القياسي، وحدِّد نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع دائرة الوحدة، واكتب إحداثيي النقطة بالصورة $(\cos\theta, \sin\theta)$.
- ذكِّر الطلبة بإشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع المختلفة للمستوى الإحداثي، واستعمال الاختصار ASTC.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وذكِّرهم بكيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد جيب زاوية حادة، ثم اطلب إليهم إيجاد $\sin 30°$ ، ثم إيجاد $\sin^{-1}(0.5)$
- اطلب إلى الطلبة إيجاد $\sin 210°$، ثم اسألهم عن توقعاتهم بخصوص النتيجة التي ستظهر على الآلة الحاسبة:

$$\sin^{-1}(-0.5)$$

- استمع إلى إجابات أكبر عدد من الطلبة، ثم اطلب إليهم إيجاد القيمة باستعمال الآلة الحاسبة، ثم اسألهم: ما النتيجة؟ -30
- وضِّح للطلبة أن الآلة الحاسبة مبرمجة لحساب قيم جيب الزاوية بين -90 و 90 ، وأنهم سيتعلمون في هذا الدرس إيجاد الحلول للزوايا من $0°$ إلى $360°$

الدرس 2

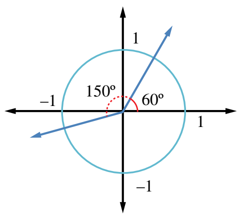
النسبُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

Trigonometric Ratios for Angles between 0º and 360º

فكرةُ الدرسِ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ لأيِّ زاويةٍ بينَ $0°$ وَ$360°$، وإيجادُ الزاويةِ إذا عُرِفَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ.

المصطلحاتُ الزاويةُ المرجعيةُ، معكوسُ النسبةِ المثلثيةِ.

مسألةُ اليومِ دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها $60°$ في الوضعِ القياسيِّ بزاويةِ $150°$ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. كيفَ نجدُ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ معَ دائرةِ الوحدةِ في موقعِهِ الجديدِ؟



تعرَّفْنا في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ باستعمالِ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ انتهائِها معَ دائرةِ الوحدةِ، وسنتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ إذا عُلِمَ قياسُ الزاويةِ بالدرجاتِ.

إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الربعِ الأولِ (أيْ كانَتْ $0° < \theta < 90°$)، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لهذهِ الزاويةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ بما نحفظُهُ منْ نسبٍ مثلثيةٍ للزوايا الخاصةِ: $(30°, 45°, 60°)$.

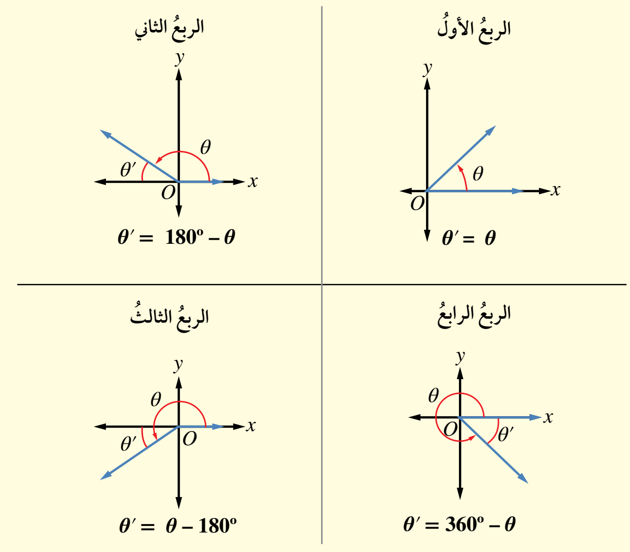
مراجعةُ المفاهيمِ

النسبُ المثلثيةُ للزوايا الخاصةِ:

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غيرُ مُعرَّفٍ

أمّا إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ في أيٍّ منَ الأرباعِ الثلاثةِ الأُخرى، فإنَّ نســبَها المثلثيةَ تكونُ مُرتبِطةً بالنسبِ المثلثيةِ **للزاويةِ المرجعيةِ** (reference angle) θ'، وهيَ الزاويةُ الحادَّةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ والمحورِ x.

مفهومٌ أساسيٌّ



النســبُ المثلثيةُ للزاويةِ θ تساوي النســبَ المثلثيةَ لزاويتِها المرجعيةِ θ' معَ اختلافِ الإشارةِ أحيانًا بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ.

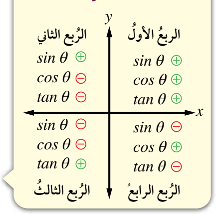
لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ θ، فإنَّنا نتَّبعُ الخطواتِ الثلاثَ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: إيجادُ الزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوةُ 2: إيجادُ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوةُ 3: تحديدُ إشارةِ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ θ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهائِها.

أَتذكَّرُ



2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) ثم اسألهم:
  - » ما قياس الزاوية بعد دوران ضلع الانتهاء؟ $210°$
  - » في أي ربع تقع هذه الزاوية؟ الربع الثالث
  - » ما إشارات النسب المثلثية الأساسية في هذا الربع؟ $\tan > 0$, $\cos > 0$, $\sin > 0$
- كيف نجد إحداثيي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة للزاوية التي قياسها $210°$؟

3 التدريس

- ذكِّر الطلبة بالنسب المثلثية للزوايا الخاصة/ المشهورة ($0°, 30°, 60°, 45°, 90°$).
- أشِرْ إلى أن الزاوية التي قياسها $0°$ هي نفسها الزاوية التي قياسها $360°$
- وضِّح للطلبة أن معرفة النسب المثلثية للزوايا الخاصة في الربع الأول تساعد على تحديد النسب المثلثية للعديد من الزوايا التي هي انعكاس للزاوية الخاصة في أحد الأرباع (الثاني، أو الثالث، أو الرابع)، حيث إن النسب المثلثية للزوايا الناتجة من الانعكاس ستكون نفس النسب المثلثية للزاوية الخاصة في الربع الأول، مع اختلاف أحيانًا في الإشارة (اسألهم: لماذا؟)

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

مثال 1

- قدِّم للطلبة مفهوم الزاويــة المرجعية/ زاوية المرجع reference angle ، ثم ارســم على اللوح حالات الزوايــا في باقي الأرباع، مُبيِّنًا علاقــة كلٍّ منها بزاوية المرجع، ومُذكِّرًا الطلبة بإشــارات النســب المثلثية الأساســية في كلٍّ من الأرباع المختلفــة، والمعادلة التي توضح العلاقــة بين الزاوية θ وزاوية المرجع θ الخاصة بكل ربع.
- ناقِش الطلبة في حل المثال 1، مُبرِّرًا كل خطوة.

تنويع التعليم

ذكِّر الطلبة بمفهوم الانعكاس Reflection حول مستقيم وحــول نقطة. يمكنك مســاعدة الطلبة علــى فهم علاقة الزوايا في الربع الثاني والثالث والرابع بزاوية المرجع عن طريق عمل انعكاس للضلــع النهائي لتلك الزوايا، بحيث تظهر صورته بعد الانعكاس فــي الربع الأول (الانعكاس حــول المحور y عندما تقع الزاوية في الربع الثاني، وحول نقطة الأصل عندما تقع في الربع الثالث، وحول المحور x عندما تقع في الربع الرابع).

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

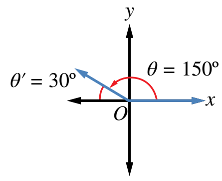
- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 150°$.

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ °150 في الربعِ الثاني؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = 180° - \theta$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

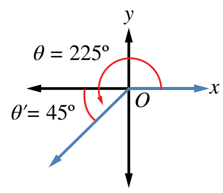
$= 180° - 150°$ $\theta = 150°$

$= 30°$

$\sin 150° = \sin 30° = 0.5$ الجيبُ موجبٌ في الربعِ الثاني

2 $\cos 225°$.

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ °225 في الربعِ الثالثِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = \theta - 180°$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$= 225° - 180°$ $\theta = 255°$

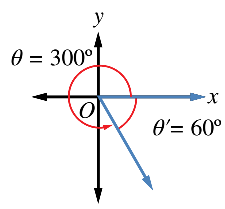
$= 45°$

$\cos 225° = -\cos 45°$ جيبُ التمامِ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 $\tan 300°$.

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ °300 في الربعِ الرابعِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



$\theta' = 360° - \theta$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta' = 360° - 300°$ $\theta = 300°$

$= 60°$

$\tan 300° = -\tan 60°$ الظلُّ سالبٌ في الربعِ الرابعِ

$= -\sqrt{3}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $\sin 120°$ b) $\tan 240°$

c) $\cos 315°$ d) $\sin 210°$

جميعُ الزوايا في المثالِ السابقِ مُرتبِطةٌ بزوايا مرجعيةٍ مألوفةٍ، مثلِ: 30°، أوْ 45°، أوْ 60°، وهيَ زوايا خاصةٌ عرفْنا قيمَ النسبِ المثلثيةِ لها. ولكنْ، كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ لأيِّ زوايا أخرى؟ يُمكِنُ إيجادُ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، ثمَّ تحديدِ الإشارةِ المناسبةِ تبعًا للربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ.

انتبهْ

يجبُ ضبطُ الآلةِ الحاسبةِ علـى خيـارِ درجـاتٍ (DEGREES) قبـلَ استعمالِها. أسألُ مُعلِّمي.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 255°$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 255° في الربعِ الثالثِ؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

$\theta' = \theta - 180°$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta' = 255° - 180°$ $\theta = 255°$

$= 75°$

$\sin 255° = -\sin 75°$ الجيبُ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin 75°$ كما يأتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 75، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 7 5 = 0.965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ: 0.966

إذنْ، $\sin 255° \approx -0.966$

إرشادات للمعلم

وجِّــه الطلبة إلى تذكُّر العلاقة بين النســب المثلثية للزاويتين المتتامتين واستعمالها ليسهل عليهم تذكُّر تلك النسب للزوايا الخاصة:

$$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$$

تنويع التعليم:

- وجِّه الطلبة إلى حل السؤال الآتي:

» جد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin^2(300°) + \cos^2(300°)$ 1

2 $2\sin 210° + 1$ 0

3 $\cos 135° + \sin 135°$ 0

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

مثال 2

- اسأل الطلبة: كيف تجد النسب المثلثية لزاوية ليست حادة وزاويتها المرجعية ليســت خاصة، مثل: °178، أو °255؟
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه: مَنْ يوافقه الرأي؟ لماذا؟ مَنْ لديه إجابة أُخرى؟ اذكرها.
- أكِّد للطلبة أنه يمكن إيجاد النســب المثلثية الأساسية لأي زاوية ليســت حادة بالاســتعانة بزاوية المرجع والآلة الحاسبة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم ناقِش معهم حلَّ المثـال 2، ثم اطلب إليهم تطبيق خطوات اســتعمال الآلة الحاســبة، وكتابة الناتج النهائــي بالتقريب إلى أقرب جزء من ألف، واستعمال الرمز ≈.

إرشادات للمعلم

وجِّــه الطلبة إلى ضبط الآلات الحاســبة على نظام الدرجــات DEG أو D، ونبِّههم إلى أن هذا الضبط يظهــر بصورة COMP أو NORM1 على الشاشــة بحسب نوع الآلة التي يستعملونها.

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ $\sin 255°$ مباشــرةً باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ منْ دونِ إيجادِ الزاويةِ المرجعيةِ على النحوِ الآتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 255 ، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 2 5 5 = -0965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشــريةٍ، تكونُ النتيجةُ -0.966 ، وهيَ النتيجةُ نفسُها التي توصَّلْتُ إليْها آنفًا.

2 **$\tan 168°$.**

أضغطُ على مفتاحِ tan ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 168، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 1 6 8 = -0.212556561

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ: -0.213

إذنْ، $\tan 168° \approx -0.213$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ: انظر الهامش

a) $\sin 320°$ b) $\cos 175°$ c) $\tan 245°$

يُمكِنُ اســتعمالُ الآلةِ الحاســبةِ لإيجادِ قياسِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ (في الربعِ الأولِ) عُلِمَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المثلثيةِ** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ الجيبِ ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامَ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ جيبِ التمــامِ ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ اســتُعمِلَ معكــوسُ الظلِّ ($\tan^{-1}$) . وبالطريقةِ نفسِــها، يُمكِنُ إيجادُ قيــاسِ أيِّ زاويةٍ في الأرباعِ الثلاثةِ الباقيةِ باســتعمالِ مفهومِ الزاويةِ المرجعيةِ وإشاراتِ النسبِ المثلثيةِ في الأرباعِ الأربعةِ.

لغةُ الرياضياتِ

- نقرأُ معكوسَ الجيبِ sine inverse.
- نقرأُ معكوسَ جيبِ التمامِ cosine inverse.
- نقرأُ معكوسَ الظلِّ tan inverse.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) ≈ -0.643

b) ≈ -0.996

c) ≈ 2.145

إرشادات للمعلم

يمكنك التركيز على تطوير مهارات الطلبة لاســتعمال الآلة الحاسبة في دروس هــذه الوحدة، فهي من المهارات الحياتية الأساســية، ويمكنك مساعدة الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط على إتقان هذه المهارة عن طريق العمل في مجموعات ثنائية مع زميل من ذوي المستوى المتوسط أو فوق من المتوسط.

الوحدةُ 3

مثال 3

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في ما يأتي، علمًا بأنَّ $0° \le \theta \le 360°$:

1 $\sin\theta = 0.98$

$\theta = \sin^{-1}(0.98)$ — θ هيَ الزاويةُ التي نسبةُ الجيبِ لها 0.98

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}(0.98)$ كما يأتي:

SHIFT sin 0 . 9 8 = → 78.521659

وبالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، تكونُ النتيجةُ: $78.5°$، وهيَ زاويةٌ مرجعيةٌ لزاويةٍ أُخرى؛ لأنَّها تقعُ في الربعِ الأولِ. وبما أنَّ الجيبَ موجبٌ في ربعيْنِ (الأولُ والثاني فقطْ)، فإنَّ الزاويةَ الأُخرى θ تكونُ في الربعِ الثاني، ويُمكِنُ إيجادُها باستعمالِ العلاقةِ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني التي تعرَّفْتُها آنفًا.

$\theta' = 180° - \theta$ — العلاقةُ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني

$\theta' = 78.5°$

$78.5° = 180° - \theta$

$\theta = 101.5°$ — بحَلِّ المعادلةِ

إذنْ، $\theta = 78.5°$، أوْ $\theta = 101.5°$

2 $\tan\theta = -1.2$

$\theta = \tan^{-1}(-1.2)$ — θ هيَ الزاويةُ التي نسبةُ الظلِّ لها تساوي -1.2

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}(-1.2)$ كما يأتي:

SHIFT tan 1 . 2 = → 50.1944289

وبالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ، تكونُ النتيجةُ: $50.2°$؛ ولأنَّ الظلَّ يكونُ سالبًا في ربعيْنِ فقطْ (الثاني والرابعُ)؛ فإنَّ الزاويةَ $50.2°$ ليسَتْ منَ الحلولِ، وإنَّما زاويةٌ مرجعيةٌ لها.

إرشادٌ
بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ تحوي المفتاحَ 2ND بدلَ المفتاحِ SHIFT .

أُفكِّرُ
أتجاهلُ الإشارةَ السالبةَ. لماذا؟

! أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة، فلا يجدون جميع الزوايا التي تُحقِّق الحل إذا عُلِمت إحدى النسب المثلثية؛ لذا ذكِّرهم أن يبدؤوا الحل بتحديد الأرباع التي يمكن أن يقع ضلع انتهاء الزاوية فيها، وأن ذلك يعتمد على إشارات النسب الأساسية في الأرباع الأربعة، ثم يكملوا حل السؤال.

مثال 3

- اطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - » كيف يمكنك إيجاد الزاوية إذا عُلِمت إحدى نسبها المثلثية، مثل: $\cos x = 0.5$؟
  - » ما عدد الزوايا بين $0°$ و $360°$ التي تُحقِّق العلاقة: $\cos = 0.5$ ؟ اذكرها، مُبرِّرًا إجابتك. 30 و 330
- كرِّر السؤالين للعلاقة: $\cos x = 0.7$.
- استمع لإجابات الطلبة، ثم أَدِرْ نقاشًا معهم عن مفهوم معكوس النسبة المثلثية Inverse Trigonometric Ratio ، مُركِّزًا على أن الزوايا التي نجدها باستعمال هذا المفهوم تتراوح قيمتها بين -90 و 90؛ ما يعني توظيف معرفة إشارات النسب المثلثية الأساسية في الأرباع الأُخرى والزاوية المرجعية في تحديد الزاوية أو الزوايا المطلوبة بدقة.
- أكِّد أن الرمز $\sin^{-1}/\cos^{-1}/\tan^{-1}$ لا يعني رفع النسبة المثلثية إلى الأس -1، ولا يعني مقلوب هذه النسبة، وإنما هو رمز متعارف عليه عالميًّا للدلالة على معكوس النسبة المثلثية، وأنها تُقرَأ على الترتيب:
  sine inverse, cosine inverse, tan inverse
- ناقِش الطلبة في حل المثال 3، وأكِّد في فرعه الأول أنه يمكن إيجاد زاويتين في هذه الحالة؛ لأن الجيب موجب في الربعين الأول والثاني، وأن الآلة الحاسبة تُظهِر الزاوية التي في الربع الأول فقط، وأنه تُستعمَل زاوية المرجع لإيجاد الزاوية الأُخرى. وفي الفرع الثاني أكِّد أن الإجابة التي تُقدِّمها الآلة الحاسبة لا يمكن أن تكون هي الإجابة المطلوبة عند إهمال القيمة السالبة للزاوية؛ لأنها زاوية في الربع الأول، ولأن الظل يكون سالبًا في الربعين الثاني والرابع (افترض أن تلك الزاوية مرجع للزاويتين المطلوبتين).

مثال إضافي

- جد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 79°$ **2** $\tan 23°$

3 $\cos 86°$ **4** $\tan 58°$

- جد قيمة (قيم) في ما يأتي:

5 $\cos\theta = 0.3298$ $0° \le \theta \le 360°$
$\theta = 70.7°, 289.3°$

6 $\tan\theta = -2.2701$ $180° \le \theta \le 360°$
$\theta = 289.3°$

مثال 4: من الحياة

- ارسم شكلًا تقريبيًّا على اللوح للدولاب الدوار الوارد في المثال 4.
- ناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي ينمذج موقفًا حياتيًّا تُطبَّق فيه الحسابات المتعلقة بالنسب المثلثية للزوايا، مُبيِّنًا لهم أن نقطة صعود الراكب في لعبة الدولاب الدوار S هي أخفض نقطة على الدولاب، وأنه عندما يدور الدولاب يرتفع الراكب وفق العلاقة المعطاة، ويكون عند أقصى ارتفاع ممكن عندما يصبح في نقطة تقع على استقامة واحدة مع مركز الدولاب والنقطة S.
- ذكِّر الطلبة بأن قطر الدائرة هو أطول أوتارها، وأنه يمر في مركزها، وأن الزاوية θ التي تقيس دوران الدولاب هي زاوية مركزية، وأنه عندما يكون قياس الزاوية المركزية $180°$، فإنها تكون على قطر الدائرة بالتأكيد.
- أخبر الطلبة أنه توجد العديد من المواقف الحياتية التي تُطبَّق فيها هذه الحسابات.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$h \approx 106.22$ m

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، واطلب إليهم حل المسائل، وتابع أعمالهم.
- ركِّز على معالجة الأخطاء المفاهيمية أو الأخطاء المتعلقة بالمهارات الحسابية يدويًّا، أو باستعمال الآلة الحاسبة، ثم ناقشها على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى حل المسألتين 21 ، و 22 ضمن مجموعات ثنائية؛ على أن تضم كل مجموعة طالبًا من ذوي التحصيل فوق المتوسط، وآخر من ذوي التحصيل دون المتوسط، وأن يتضمن الحل كتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات زملائهم.

إذا استعملْنا العلاقةَ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزوايا المناظرةِ في الربعيْنِ الثاني والرابعِ، فإنَّنا سنجدُ هاتيْنِ الزاويتيْنِ:

زاويةُ الربعِ الثاني: $180° - 50.2° = 129.8°$

زاويةُ الربعِ الرابعِ: $360° - 50.2° = 309.8°$

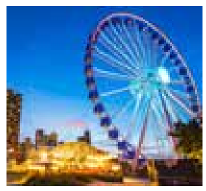
أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ $0° \leq \theta \leq 360°$: انظر الهامش

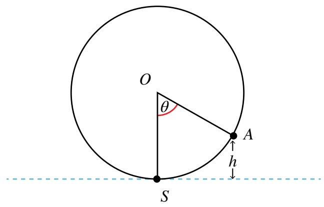
a) $\cos\theta = -0.4$ b) $\tan\theta = 5.653$ c) $\sin\theta = -0.5478$

مثال 4: من الحياة

ترفيهٌ: يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دولابًا دوّارًا في مدينةِ ألعابٍ يدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ نقطةَ صعودِ الراكبِ الذي موقعُهُ الآنَ عندَ النقطةِ A، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدولابِ. إذا دارَ الدولابُ بزاويةِ θ، فإنَّ ارتفاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ (h) بالأمتارِ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 67.5 - 67.5\cos\theta$. أَجِدُ طولَ قُطْرِ الدولابِ.



صُمِّمَ أولُ دولابٍ دوّارٍ في مدينةِ شيكاغو الأمريكيةِ عامَ 1893م، وقدْ سُمِّيَ عجلةَ فيريس.



عندما يصلُ الراكبُ إلى النقطةِ الواقعةِ فوقَ S مباشرةً، فإنَّ ارتفاعَهُ عنِ الأرضِ يساوي طولَ قُطْرِ الدولابِ، وإنَّ θ في تلكَ اللحظةِ تساوي $180°$:

$h = 67.5 - 67.5\cos 180°$ بتعويضِ قيمةِ θ

$= 67.5 - 67.5(-1)$ $\cos 180° = -1$

$= 67.5 + 67.5 = 135$ بالتبسيطِ

إذنْ، طولُ قُطْرِ الدولابِ هوَ: 135 m

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ عندما $\theta = 235°$ انظر الهامش

92

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 19 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $\theta \approx 113.58°$ / $\theta \approx 246.44°$

b) $\theta \approx 79.97°$ / $\theta \approx 259.97°$

c) $\theta \approx 213.22°$ / $\theta \approx 326.78°$

الوحدةُ 3

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\sin 130^\circ$ ≈ 0.766 2) $\sin 325^\circ$ ≈ -0.574 3) $\cos 270^\circ$ 0

4) $\tan 120^\circ$ $-\sqrt{3}$ 5) $\cos 250^\circ$ ≈ -0.342 6) $\tan 315^\circ$ -1

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

7) 325° 215° 8) 84° 96° 9) 245° 295°

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

10) 280° 80° 11) 150° 210° 12) 215° 145°

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

13) 75° 255° 14) 300° 120° 15) 235° 55°

أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أَوْ قيمَ) θ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

16) $\sin \theta = 0.55$ $\theta \approx 33.37^\circ$ / $\theta \approx 146.63^\circ$

17) $\cos \theta = -0.05$ $\theta \approx 92.87^\circ$ / $\theta \approx 272.87^\circ$

18) $\tan \theta = 0$ $\theta = 0^\circ$ / $\theta = 180^\circ$

19) **أنهارٌ:** يتغيَّرُ عمقُ الماءِ y بالأمتارِ في نهرٍ بسببِ المدِّ والجزْرِ البحريِّ تبعًا للساعةِ x منَ اليومِ. إذا كانَتِ العلاقةُ $y = 3\sin((x-4)30^\circ) + 8$ تُمثِّلُ عمقَ الماءِ في النهرِ يومًا ما، حيثُ: $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 24$، وتُمثِّلُ القيمةُ $x = 0$ الساعةَ الثانيةَ عشرةَ منتصفَ الليلِ، وَالقيمةُ $x = 5$ الساعةَ الخامسةَ فجرًا، وَالقيمةُ $x = 13$ الساعةَ الواحدةَ بعدَ الظهرِ، وهكذا، فما أقصى عمقٍ للنهرِ؟ في أيِّ ساعةٍ يحدثُ ذلكَ؟ انظر ملحق الإجابات

20) أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

21) **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَتْ سندسُ نسبةَ جيبِ إحدى الزوايا في الربعِ الثاني، فكانَتْ قيمتُها 1.4527 هلْ إجابةُ سندسَ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر ملحق الإجابات

22) **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمةَ ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي: انظر ملحق الإجابات

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots\dots + \cos 357^\circ + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$$

93

المفاهيم العابرة:

- بعد الانتهاء من حل المثال4، عزِّز الوعي **بالقضايا الإنسانية (حق الإنسان في الترفيه)**، عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن الحدائق، واسألهم:
  - » فيمَ يُستفاد من وجود حدائق عامة في المدن؟
  - » مَنْ يذكر بعض السلوكات السليمة التي يجب اتباعها عند زيارة الحدائق العامة؟

إرشادات:

- عند حل الأسئلة: 5 ,2 ,1 وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة.
- في السؤال 19: بعد 12 ساعة، تكون الساعة 19:00؛ أي السابعة مساءً، عندئذٍ تكون:

$\theta = 450^\circ$ (لاحظ أن $\sin 450^\circ = 1$).

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى الحكم على مدى صحة العبارة الآتية، وتقديم تبريراتهم بالطريقة التي يرونها مناسبة:
  - » تزداد قيمة النسبة المثلثية $\sin \theta$ كلما زادت قيمة الزاوية θ عندما: $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.
- يمكنك في المنزل فتح الرابط:

https://www.purposegames.com/game/e6840d5043

ثم الاستمتاع باللعبة التفاعلية الخاصة بالنسبتين المثلثتين: الجيب وجيب التمام لزوايا خاصة.

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى إكمال تنفيذ الخطوة الأولى من المشروع، وإيجاد الإحداثيات الديكارتية للنقاط الست التي عيَّنوها على الرسم.
- وجِّه الطلبة إلى إنشاء جدول يتضمن الإحداثيات القطبية، والإحداثيات الديكارتية لكل نقطة.
- بيِّن للطلبة أنه يمكنهم البدء بتنفيذ الخطوة الثانية، وحساب محيط الشكل السداسي.
- ذكِّر أفراد المجموعات بتصميم لوحة من الكرتون تتضمن خطوات تنفيذ مشروع الوحدة، ودور كل عضو في المجموعة.

6 الختام

نشاط (مسابقة بين فريقين)

المواد والأدوات:

آلة حاسبة لكل فريق، صندوق، بطاقات.

خطوات التنفيذ:

- جهِّز البطاقات قبل بدء الحصة، واكتب على كلٍّ منها سؤالًا عن إيجاد نسبة مثلثية لزاوية معلومة باستعمال الآلة الحاسبة، أو إيجاد قياس الزاوية إذا عُلِمت نسبتها المثلثية.
- اسأل الطلبة:
  - » مَنْ يرغب في المشاركة؟
  - » أنشِئ فريقين يتكوَّن كلٌّ منهما من أربعة متسابقين.
- اطلب إلى أفراد كل فريق سحب 4 بطاقات من الصندوق، ثم حل الأسئلة المكتوبة عليها.
- الفريق الفائز هو مَنْ يحل أكبر عدد من الأسئلة بصورة صحيحة.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تمثيل اقتران الجيب في الفترة $[0°, 360°]$ بيانيًّا.
- تمثيل اقتران جيب التمام في الفترة $[0°, 360°]$ بيانيًّا.
- تمثيل اقتران الظل في الفترة $[0°, 360°]$ بيانيًّا.
- تعرف خصائص الاقترانات المثلثية الأساسية.

التعلم القبلي:

- تمثيل الاقترانات بيانيًّا.
- النسب المثلثية الأساسية للزوايا الحادة.

1 التهيئة

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » مَنْ يذكر بعض أنـواع الاقترانات؟ اقتران خطي، اقتران تربيعي، اقتران أسي.
  - » ماذا يعني التمثيل البياني للاقتران؟ إجابة مُحتمَلة: رسم منحنى يمثل الاقتران.
  - » كيف نمثل منحنى الاقتران $y = x^2$ بيانيًّا؟
- ذكِّـر الطلبة بكيفية اسـتعمال جـداول القيم لتمثيل الاقترانــات الخطية والاقترانــات التربيعية، ثم تعيين النقاط باستعمال أزواج مرتبة في المستوى الإحداثي، والتوصيل بينها بمستقيم في حالة الاقترانات الخطية، وبمنحنى متصل في حالة الاقترانات التربيعية.
- اسأل الطلبة:
  - » ما أصغر قيمة للاقتران $y = x^2$؟ $y = 0$
  - » ما أكبر قيمة له؟ لا توجد.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المســألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » هل يتغير عمق الماء بمرور الزمن؟ نعم
  - » ما أكبــر قيمة لجيــب الزاوية؟ ما قيــاس الزاوية عندئذٍ؟ $1, \theta = 90°$
  - » ما أصغر قيمــة لجيب الزاوية؟ ما قيــاس الزاوية عندئذٍ؟ $-1, \theta = 270°$
  - » هل يمكن رسم منحنى يمثل اقتران الجيب؟
  - » أيُّكم يتوقع شكل هذا المنحنى؟
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

الدرسُ 3

تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ
Graphing Trigonometric Functions

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ اقتراناتٍ مثلثيةٍ مجالُها الفترةُ $[0°, 360°]$ بيانيًّا.

مسألةُ اليومِ يرتبطُ عمقُ الماءِ عندَ نقطةٍ مُعيَّنةٍ في أحدِ الموانئِ بالزمنِ حسبَ العلاقةِ:

$$y = \sin x, x \geq 0$$

حيثُ: y عمقُ الماءِ بالأمتارِ، وَ x الزمنُ بالساعاتِ بعدَ منتصفِ الليلِ. هلْ يُمكِنُ رسمُ منحنى يُبيِّنُ تغيُّرَ عمقِ الماءِ في الميناءِ معَ مرورِ الوقتِ؟

تُســتخدَمُ الاقتراناتُ المثلثيةُ في تمثيلِ مواقفَ حياتيةٍ مرتبطةٍ بالحركةِ الدوريةِ، مثلِ: موجاتِ الصوتِ، وضغطِ الدمِ في جســمِ الإنسانِ، وارتفاعِ مقعدٍ في دولابٍ دوّارٍ، وتغيُّرِ عددِ ساعاتِ النهارِ خلالَ عامٍ، وغيرِ ذلكَ. ولكنْ، هلْ يُمكِنُ رســمُ منحنــى اقترانٍ يُبيِّنُ كيفَ تبدو الحركةُ الدوريةُ التي تُمثِّلُها هذهِ الاقتراناتُ؟

تعلَّمْتُ ســابقًا كيفيةَ تمثيلِ اقتراناتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ في المستوى الإحداثيِّ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ للمُتغيِّريْنِ x وَy، وتمثيلِ كلِّ زوجٍ (x, y) بنقطةٍ في المســتوى، ثمَّ رســمِ المنحنى الذي يصلُ هذهِ النقاطَ ببعضِها. وفي هذا السياقِ، يُمكِنُ اتِّباعُ الطريقةِ نفسِها لتمثيلِ الاقتراناتِ المثلثيةِ.

مثال 1

أرسمُ منحنى كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ ثم أَصِفُهُ، علمًا بأنَّ $0° \leq x \leq 360°$:

1) $y = \sin x$.

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً، نســبُها المثلثيةُ معروفةٌ، مثلَ: الزوايا الربعيةِ، والزوايا التي زاويتُها المرجعيةُ $30°$.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\sin x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أَكتبُها في الجدولِ:

ملاحظات المعلم

3 التدريس

- عرِّف الاقترانات المثلثية بأنها اقترانات تحوي نسبة مثلثية واحدة على الأقل، مثل: sin، أو cos، أو tan، وأنها تستعمل لنمذجة العديد من المواقف الحياتية، مثل: ضغط الدم، وارتفاع مقعد على لعبة دولاب دوار، وجهد الإشارات الإلكترونية.
- أَشِرْ إلى أنه لتمثيل الاقترانات المثلثية يمكن اتباع الإجراءات نفسها المستعملة لتمثيل الاقترانات الخطية أو التربيعية.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1، وبرِّر لهم سبب اختيار الزاوية $30°$ بوصفها زاوية مرجع في الفرع الأول، واختيار الزاوية $60°$ بوصفها زاوية مرجع في الفرع الثاني، مُذكِّرًا الطلبة بالخصائص التي يمكن ملاحظتها في كل تمثيل بياني.
- في الفرع الأول:
- اطلب إلى الطلبة تحديد التماثل في منحنى الجيب بدراسة كلٍّ من المنحنى والجدول.
- اطلب إلى الطلبة توضيح الفرق بين التماثل الحاصل في منحنى الجيب حول $90°$، وحول $180°$.
- في الفرع الثاني:
- اطلب إلى الطلبة تحديد التماثل في منحنى جيب التمام بدراسة كل من المنحنى والجدول.
- اطلب إلى الطلبة توضيح الفرق بين التماثل الحاصل في منحنى جيب التمام حول $180°$.
- اطلب إلى الطلبة وصف منحنى جيب التمام وعلاقته بمنحنى الجيب، إذا أدرك الطلبة هذه العلاقة فسيجيبون بأن منحنى جيب التمام هو منحنى الجيب نفسه مع انسحاب بمقدار $90°$ نحو اليمين.

إرشادات للمعلم

- أخبر الطلبة أن معرفة أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران المثلثي الذي يتضمن sin أو cos تساعد على تمثيل هذا الاقتران.
- تذكَّر أن تعزيز قدرة الطلبة على ملاحظة التماثلات الحاصلة لمنحنى الجيب حول زوايا محددة يساعدهم على فهم النسب المثلثية للزوايا بين $0°$ و $360°$، فيفهمون – مثلًا– أن $\sin 30° = 0.5 = \sin (180 - 30)°$.
- أخبر الطلبة أنه يمكنهم الاستعانة بمضاعفات الزاوية $30°$، مثل: $150°$، $120°$، $90°$، $60°$، بدءًا بالزاوية التي قياسها $0°$ عند تمثيل اقتران الجيب، وأنه عند تمثيل الزوج المرتب $(60°, \sin 60°)$ – مثلًا– تُستعمَل الآلة الحاسبة، ويُقرَّب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ إلى 0.87

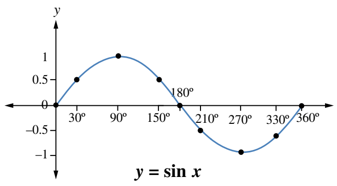
التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

x	0º	30º	90º	150º	180º	210º	270º	330º	360º
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبَةَ: $(0º, 0), (30º, 0.5), (90º, 1), \ldots\ldots (360º, 0)$ في المستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 4: أَصِلُ بمنحنًى أملسَ بينَ النقاطِ، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ المجاورِ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\sin x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\sin x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1
- $\sin x$ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ $0º < x < 180º$، وسالبًا إذا كانَتْ $180º < x < 360º$.

أُفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ منحنى اقترانِ الجيبِ والزوايا المرجعيةِ التي تعلَّمْتُها في الدرسِ السابقِ؟

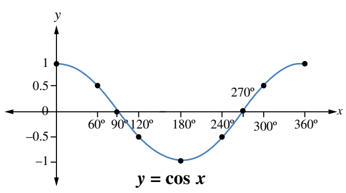
2 $y = \cos x$.

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا أَكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\cos x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أَكتبُها في الجدولِ:

x	0º	60º	90º	120º	180º	240º	270º	300º	360º
$y = \cos x$	1	0.5	0	–0.5	–1	– 0.5	0	0.5	1

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبَةَ: $(0º, 1), (60º, 0.5), (90º, 0), \ldots\ldots (360º, 1)$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ بمنحنًى أملسَ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\cos x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\cos x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1

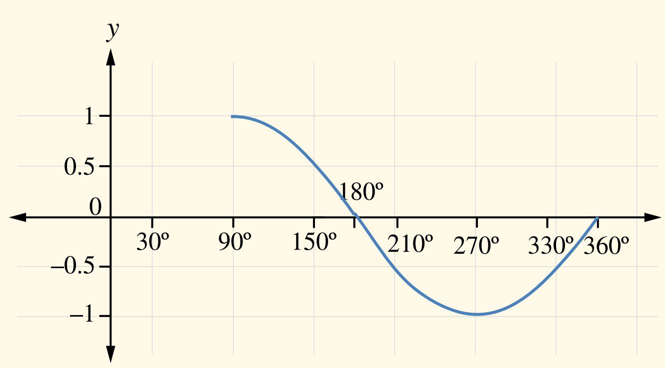
إرشادٌ

يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لتمثيلِ الاقترانِ $\cos x$، وملاحظةِ أكبرِ قيمةٍ لهُ، وأصغرِ قيمةٍ لهُ أيضًا.

إرشادات للمعلم

وجِّه الطلبة إلى أهمية تقسيم المحور الأفقي أقسامًا متساوية بالزوايا، وكذلك المحور الرأسي، ولكن بالأعداد، ثم اطلب إليهم تفسير ذلك.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

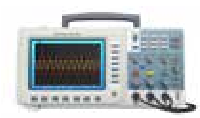


- $\cos x$ يكـونُ موجبًـا إذا كانَتْ $0° < x < 90°$، وَ $270° < x < 360°$، وسـالبًا إذا كانَتْ $90° < x < 270°$.

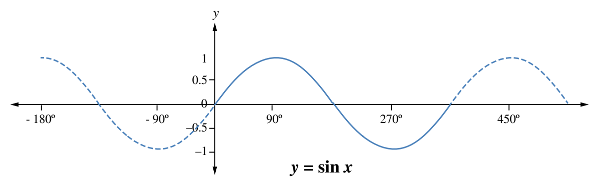
أتحقق من فهمي انظر الهامش

أرسـمُ منحنى الاقترانِ $y = \sin x$، علمًا بأنَّ $90° \le x \le 360°$، مُسـتعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الجيبِ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

تعرَّفْتُ أنَّهُ توجدُ زوايا أكبرُ منْ $360°$. فإذا دارَ ضلعُ ابتداءِ الزاويةِ (في الوضعِ القياسـيِّ) أكثرَ مـنْ دورةٍ واحدةٍ عكسَ اتجاهِ عقاربِ السـاعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا أكبـرَ من $360°$، وإذا دارَ معَ اتجاهِ عقاربِ السـاعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا قياسُـها سـالبٌ؛ ولهذا، فقدْ يكونُ قياسُ الزاويةِ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ للأعدادِ الحقيقيةِ جميعِها، وليسَ فقطْ للزوايا الواقعةُ بينَ $0°$ وَ $360°$، أُلاحِظُ منحنى اقترانِ الجيبِ الآتي.



كاشفُ الاهتزازِ (الأوسيليسكوبُ) هوَ جهازٌ يرسـمُ جُهْدَ الإشـاراتِ الإلكترونيةِ على شكلِ مُخطَّطٍ يُشْبِهُ التمثيـلَ البيانيَّ لاقتـرانِ الجيبِ، ويُسـتعمَلُ لاكتشـافِ أعطـالِ الأجهزةِ الكهربائيةِ.



والآنَ، سأرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، مُلاحِظًا الفرقَ بينَهُ وبينَ منحنيَي الاقترانيْنِ $\sin x$، وَ $\cos x$.

مثال 2

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، ثمَّ أَصِفُهُ علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

الخطوةُ 1: أُكوِّنُ جدولًا، ثمَّ أَكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\tan x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أَكتبُها في الجدولِ:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	–1	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	–1	0

إرشادات للمعلم

- يمكنك توظيف برمجية جيوجبرا كما جاء في الإرشـاد السـابق لتوضيح مفهوم الاقتران الدائري على كلٍّ من جيب التمام والظل.
- أخبر الطلبـة أن مهارة تحديد خطوط التقارب الرأسـي أساسـية لتمثيل الاقتران المثلثي الذي يتضمن tan، وأنها تساعد على تمثيل الاقتران.

مثال 2

- وضِّـح للطلبة أنه يمكن تمثيل الاقترانات المثلثية على جميع الأعـداد الحقيقية، ولكن ليـس -بالضرورة- ضمن فتـرة مغلقة، أو ضمـن دورة واحـدة، حيث: $0° \le \theta \le 360°$، ولذلـك تسـمى هـذه الاقترانات الاقترانات الدائرية أو الدورية Cyclic Functions؛ إذ يتكـرَّر المنحنى الـذي يظهر ضمـن دورة واحدة على مجال هـذه الاقترانات، وهو الأعـداد الحقيقية $(-\infty,\infty)$. يمكنـك اسـتعمال برمجيـة جيوجبـرا لتوضيح ما سـبق عن اقترانات الجيـب وجيب التمام، وتوظيـف خاصيتـي Animation On :، و Show Trace.
- ناقِش الطلبـة في حل المثال 2، مُؤكِّـدًا أهمية تحديد خطوط التقارب الرأسـي Vertical Asymptotes (خطوط متقطعـة) قبل تعيين النقاط، ورسـم منحنى $y = \tan x$.
- بيِّن للطلبـة أن منحنى اقتران الظـل يكون غير متصل عنـد الزوايا التي ليس له تعريـف عندها؛ أي عند 90° و 270°، وأنـه بموازاة خطوط التقارب الرأسـية يمتد منحنى الظـل في الاتجاهين: إلـى $+\infty$ في الربعين: الأول والثالث، وإلى $-\infty$ في الربعين: الثاني والرابع.

تنويع التعليم

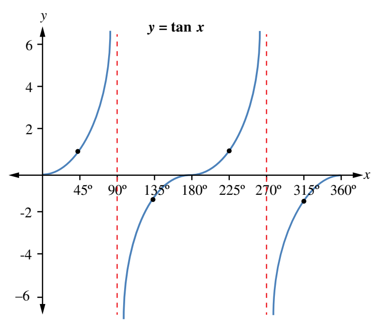
لتوضيـح مفهـوم الاقتران الدائـري باسـتعمال برمجية جيوجبرا، اتبع الآتي:

- أدخـل $f(x) = \sin(x)$ فـي Input bar، ثم اضبط تدريج المحور x لنظام الزوايا.
- ضـع نقطة علـى المنحنى الـذي ظهر رسـمه. ومن خصائصها، اختر Show Trace.
- اختر من خصائص، النقطة Animation On.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا صعوبةَ التوصيلِ بينَ النقاطِ بمنحنًى واحِدٍ؛ لأنَّ قيمةَ $\tan x$ غيرُ مُعرَّفةٍ للزاويتيْنِ $90°$ وَ $270°$؛ لذا أَصِلُ النقاطَ قبلَ الزاويةِ $90°$ ببعضِها، والنقاطَ بينَ الزاويتيْنِ $90°$ وَ $270°$ ببعضِها، والنقاطَ بعدَ الزاويةِ $270°$ ببعضِها، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ الآتي.



أَتعلَّمُ

يُسمّى كلٌّ مِنَ المستقيميْنِ $x = 90°$ وَ $x = 270°$ خطَّ تقاربٍ رأسيٍّ لمنحنى $\tan x$؛ لأنَّ المنحنى يقتربُ كثيرًا منْهُما، لكنَّهُ لا يقطعُهُما.

يُبيِّنُ الشكلُ أنَّ منحنى $\tan x$ غيرُ متصلٍ؛ فهوَ مُكوَّنٌ مِنْ عِدَّةِ قطعٍ، وأنَّ الظلَّ موجبٌ بينَ الزاويتيْنِ $0°$ وَ $90°$، وبينَ الزاويتيْنِ $180°$ وَ $270°$، وأنَّهُ يكونُ سالبًا بينَ الزاويتيْنِ $90°$ وَ $180°$، وبينَ الزاويتيْنِ $270°$ وَ $360°$.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، علمًا بأنَّ $90° < x < 270°$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الظلِّ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ: 1–4 انظر ملحق الإجابات

1) $y = \sin x \quad 0° \le x \le 270°$

2) $y = \cos x \quad 0° \le x \le 180°$

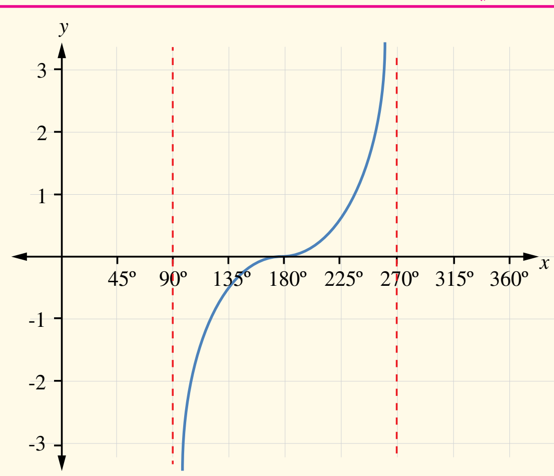
3) $y = \sin x \quad 0° \le x \le 180°$

4) $y = \tan x \quad 0° \le x \le 180°$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، واطلب إليهم حل المسائل، وتابع أعمالهم.
- ناقِش الطلبة في حل الأسئلة: 9، 8، 7، 6، 5، 4، 2، 10، 13 على اللوح (يمكنك رسم تمثيلات تقريبية حيثما يلزم ذلك).
- تحقَّق من فهم الطلبة للدرس بتكيفهم صفيًا (فرديًّا، وجماعيًّا)، عن طريق حل بعض الأسئلة التي لم تُناقِشهم في حلها من بند **(أتدرب وأحل المسائل)** في الصفحات (97–99) من كتاب الطالب (اختر لهم ما تراه مناسبًا)، ثم تابع أعمالهم الكتابية، ووجِّههم إلى حل ما تبقّى من الأسئلة بأنفسهم، ثم مناقشة الحلول فيما بينهم.

إجابة أتحقق من فهمي 2:



مهارات التفكير العليا

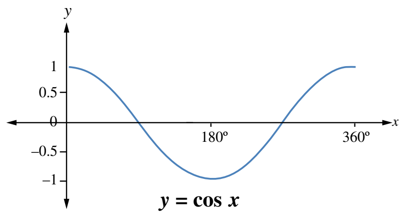
- وجِّـه الطلبـة إلى حـل المسـألتين 14 ، و 15 ضمن مجموعات ثنائيـة؛ على أن تضـم كل مجموعة طالبًا مـن ذوي التحصيل فوق المتوسـط، وآخـر من ذوي التحصيل دون المتوسـط، وامنحهم وقتًا كافيًا لتمثيل المنحنيات في المسألة 14 يدويًّا، ثم التحقُّق من صحة حلولهم باستعمال برمجية جيوجبرا في المنزل.
- ناقِـش طلبـة الصف جميعهـم في بعـض الإجابات المتميزة للمسألة 15.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة 20 من كتـاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التي يمكنهم حلهـا في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

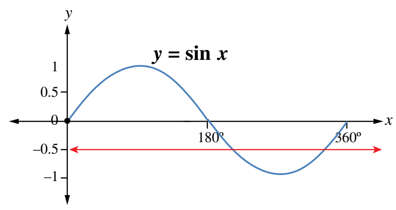
5 يُبيِّنُ الشـكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيـلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = cos\ x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $cos\ x = -0.5$

120° , 240°



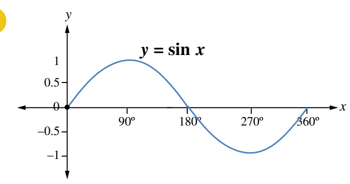
6 يُبيِّنُ الشـكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيـلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \sin x$. بناءً على هذا الشـكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\sin x = -0.5$

210° , 330°



أستعملُ التمثيلاتِ البيانيةَ الآتيةَ لأجِدَ قيمَ: a, b, c, d, e, f, g, h.

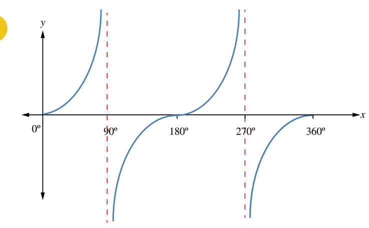
7



$\sin 0° = \sin a° = \sin b°$
$\sin 30° = \sin c°$
$\sin 60° = \sin d°$
$\sin 210° = \sin e°$

$a = 180°, b = 360°, c = 150°, d = 120°, e = 330°$

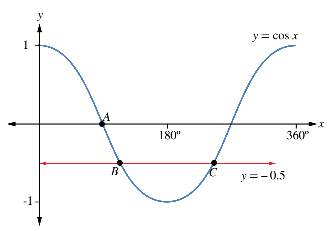
8



$\tan 0° = \tan e° = \tan f°$
$\tan 45° = \tan g°$
$\tan 60° = \tan h°$

$e = 180°, f = 360°, g = 225°, h = 240°$

يُبيِّنُ الشـكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = cos\ x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = -0.5$ في النقطتيْنِ B, C:



9 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A. $A(90° , 0)$

10 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ B, C باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.
$B(120° , -0.5)$
$C(240° , -0.5)$

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط إلى البحث عن صورة لتطبيق حياتي يمكن تمثيله في صورة اقتران الجيب، والتقاط صورة له، ثم استعمال برنامج جيوجبرا وما تعلموه في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة الأولى لإيجاد قاعدة الاقتران، وتوثيق ذلك بالصور، ثم اعرضه أمام زملائهم في الصف.

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوة الثانية من خطوات المشروع.
- ذكِّر أفراد كل مجموعة بأنه يتعيَّن عليهم الانتهاء من إعداد المُدوَّنة (الإلكترونية)، أو (المنشور الورقي) الذي يوضح أعمال المجموعة في أثناء تنفيذ المشروع، ونقاشاتها عن موضوع مشروع الوحدة، وتلخيص النتائج التي توصَّلوا إليها.

6 الختام

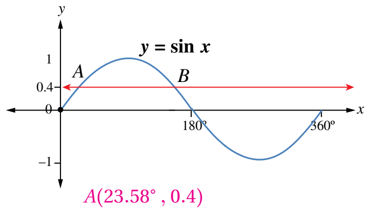
- اكتب السؤالين الآتيين على اللوح، ثم اطلب إلى كل طالب أنْ يجيب عنها - في 3 دقائق - في ورقة، ويكتب عليها اسمه:

» ما الاقتران المثلثي؟

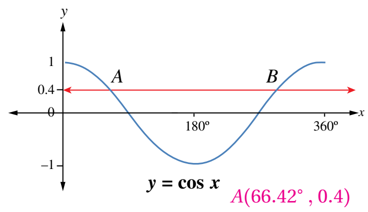
» قارِن بين اقتراني الجيب وجيب التمام، مُبيِّنًا خصائص كلٍّ منهما بعباراتك الخاصة.

- اجمع الأوراق، ثم اقرأها خارج غرفة الصف، وقدِّم التغذية الراجعة لمَنْ يحتاج في اللقاء التالي.

أجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ A و B في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

11


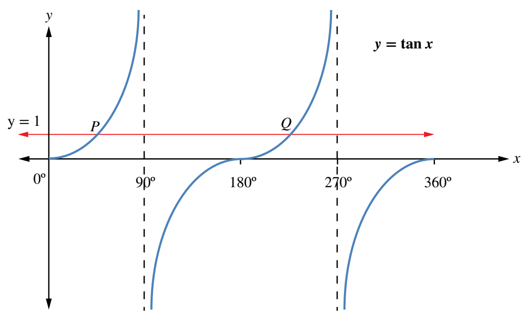
$A(23.58°, 0.4)$
$B(156.42°, 0.4)$

12


$A(66.42°, 0.4)$
$B(293.58°, 0.4)$

13 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \tan x$، حيثُ يقطعُ المستقيمُ $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقطتيْنِ: P، وَ Q. أكتبُ الإحداثيَّ x لكلٍّ منَ النقطتيْنِ: P، وَ Q.

$P(45°, 1)$
$Q(225°, 1)$



مهارات التفكير العليا

14 **تحدٍّ**: أرسمُ منحنيَي الاقترانيْنِ $y = \cos x$ وَ $f = 2\cos x$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، في الفترةِ $0° \le x \le 360°$، ثمَّ أقارِنُ بينَهُما. انظر ملحق الإجابات

15 **أكتبُ**: ما الفرقُ بينَ منحنيَي الجيبِ وجيبِ التمامِ؟

ستتنوع إجابات الطلبة.

الدرس 4

نتاجات الدرس

- حل معادلات تتضمن النسب المثلثية $(\sin, \cos, \tan)$، وتكون مجموعة الحل ضمن الدورة الواحدة.

التعلم القبلي:

- حل المعادلة الخطية.
- حل المعادلة التربيعية بالتحليل.
- قوانين الأسس.

1 التهيئة

- اطلب إلى الطلبة تعريف المعادلة، وذكر أمثلة عليها، ثم ناقِشهم في ذلك.
  » اكتب معادلــة خطية ومعادلة تربيعية يمكن حلهما بالتحليل، ثم اطلب إلى الطلبة حلهما.
  » ذكِّر الطلبــة بالمهارات المتعلقــة بتحليل العبارة التربيعية.
  » اكتب علــى اللوح المعادلــة: $4\sin^2\theta = 3$، ثم اسأل الطلبة:
  » هل هذه معادلة؟ نعم
  » فيمَ تختلف هــذه المعادلة عن المعادلة التربيعية؟ ستتنوع إجابات الطلبة
  » ماذا تتوقعون أن تتعلموا في هذا الدرس؟ ستتنوع إجابات الطلبة
- امنح الطلبة (3–2) دقائق لتقديم إجاباتهم عن السؤال الأخير، واستمع لهم من دون تقديم أي تغذية راجعة.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المســألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » ماذا يمكن أن نسمي العلاقة d؟ معادلة مثلثية
  » مــا المجهــول (أو المتغيــر المســتقل) في هذه العلاقة؟ قياس الزاوية
  » هل تعتقد أن حلها يشبه حل المعادلات التي سبق دراستها؟ نعم
  » اقترح طريقة لحلها. ستتنوع إجابات الطلبة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

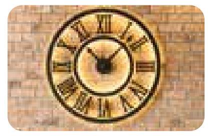
الدرس 4

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ
Solving Trigonometric Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ تتضمَّنُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ، وتكونُ فيها مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ دورةٍ واحدةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ المثلثيةُ.

مسألةُ اليومِ ساعةُ حائطٍ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِ الساعاتِ فيها 16 cm، وبُعْدُ رأسِ العقربِ عنْ سقفِ الغرفةِ يُمثِّلُ دائمًا بالعلاقةِ: $d = -16\cos(30x) + 110$، حيثُ: d البُعْدُ بالسنتيمترِ، وَ x الوقتُ بالساعاتِ، فما الوقتُ الذي يبعدُ فيهِ رأسُ عقربِ الساعاتِ 118 cm عنِ السقفِ؟



المعادلةُ المثلثيةُ (trigonometric equation) هيَ معادلةٌ مُتغيِّراتُها نسبٌ مثلثيةٌ لزاويةٍ مجهولةٍ. وحَلُّ المعادلةِ المثلثيةِ يعني إيجادَ الزاويةِ (أوِ الزوايا) التي تُحقِّقُ هذهِ المعادلةَ، وتجعلُ منْها عبارةً صحيحةً.

منَ الأمثلةِ على المعادلاتِ المثلثيةِ:

$\sin x = 0.5$, $\tan x = 2.435$, $2 + \cos x = 3 - 2\cos x$, $2\sin^2 x = 3$

يُمكِنُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ، مثلِ: $\sin x = a$، وَ $\cos x = a$، باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوِ استعمالِ ما نتذكَّرُهُ منْ نسبِ الزوايا الخاصةِ.

مثال 1

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

1 $2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180° - 30° = 150°$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 30°، وَ 150°.

أَتذكَّرُ
يكونُ جيبُ الزاويةِ موجبًا في الربعيْنِ: الأولِ، والثاني.

3 التدريس

- قدِّم للطلبة مفهوم المعادلة المثلثية Trigonometric Equation، ثم اعرض أمامهم مجموعة من الأمثلة عليه.
- اعرض أمام الطلبة أمثلة متنوعة من المعادلات (خطية، تربيعية، أسية، مثلثية، ...)، ثم اطلب إليهم تصنيفها.
- اعرض أمام الطلبة المثال 1، ثم ناقِشهم في حله، واسألهم قبل بدء الحل:
  » كم عدد الحلول المحتملة للمعادلة في الفرع الأول؟ لماذا؟ يوجد حلان؛ لأن الجيب موجب في الربعين: الأول، والثاني.
- نبِّه الطلبة إلى استعمال مفهوم معكوس النسبة المثلثية، مثل:
  » للمعادلات المثلثية البسيطة، مثل: $\cos\theta = 0.5$، استعمل مفهوم معكوس النسبة المثلثية، واكتب: $\theta = \cos^{-1}(0.5)$.
- نبِّه الطلبة إلى وجود حلين للمعادلة المثلثية ضمن الدورة الواحدة مُبيِّنًا لهم سبب ذلك.
- تحقَّق من صحة الحل بتعويض الحلين (الزاويتين) في المعادلة المثلثية.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

إرشادات للمعلم

وجِّه الطلبة إلى التحقق دائمًا من صحة الحل، وذكِّرهم بأن بعض المعادلات المثلثية يمكن حلها اعتمادًا على ما نعرفه من النسب المثلثية للزوايا الخاصة ومفهوم زاوية المرجع، في حين يتطلب حل بعض المعادلات المثلثية تبسيطها قبل استعمال الآلة الحاسبة وتوظيف مفهوم معكوس النسبة المثلثية كما تعلَّموا سابقًا.

2) $3\cos x - 1 = 2$

$3\cos x = 3$ بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = 1$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

لهذِهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 0°، وَ 360°.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$: انظر الهامش

a) $2\cos x = \sqrt{3}$ b) $2\tan x + 3 = 1$

يتطلّبُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ مزيدًا منَ التبسيطِ والمعالجةِ قبلَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ:

1) $2(\tan x - 3) + 4 = 12,\ 0^\circ \le x \le 360^\circ$

$2\tan x - 6 + 4 = 12$ باستعمالِ الخاصيةِ التوزيعيةِ

$2\tan x = 14$ بالتبسيطِ

$\tan x = 7$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \tan^{-1}(7)$ تعريفُ معكوسِ الظلِّ

$x = 81.9^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الظلَّ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثالثِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180^\circ + 81.9^\circ = 261.9^\circ$

إذنْ، لهذِهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 81.9°، وَ 261.9°

أتذكَّر

الزاويةُ المرجعيةُ هيَ الزاويةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ والمحورِ x.

إجابة (أتحقق من فهمي 1):

a) $x = 30^\circ, x = 330^\circ$

b) $x = 135^\circ, x = 315^\circ$

2 $1 + 4 \sin(3x) = 2.5 , 0^\circ \le x \le 90^\circ$

$4 \sin(3x) = 2.5 - 1$	بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ
$\sin(3x) = \frac{1.5}{4}$	بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4
$\sin\theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$	باستعمالِ الرمزِ θ بدلًا منْ $3x$ ، حيثُ: $0^\circ \le \theta \le 270^\circ$
$\theta = \sin^{-1}(0.375)$	تعريفُ معكوسِ الجيبِ
$\theta = 22^\circ$	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$22^\circ = 3x \Rightarrow x = 7.3^\circ$

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$	الزاويةُ في الربعِ الثاني
$\theta = 3x = 158^\circ$	بالتعويضِ
$x \approx 52.7^\circ$	بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

إذنْ، للمعادلـةِ $1 + 4\sin(3x) = 2.5$ حَـلّانِ ضمـنَ الفتـرةِ المعطاةِ في المسـألةِ، هما: 7.3°، وَ 52.7°

معلومةٌ أساسيةٌ

إذا كانَتْ $0^\circ \le x \le 90^\circ$، فإنَّ $0^\circ \le 3x \le 270^\circ$

أتحقق من فهمي

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ: انظر الهامش

a) $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x , 0^\circ \le x \le 360^\circ$

b) $3\cos(2x) - 1 = 0 , 0^\circ \le x \le 180^\circ$

يُمكِنُ حَلُّ المعـادلاتِ المثلثيةِ التربيعيةِ بطرائقَ مشـابهةٍ لطرائقِ حَلِّ المعـادلاتِ التربيعيةِ الجبريةِ، أبرزُها: إيجادُ العاملِ المشـتركِ، والتحليلُ إلى ناتجِ ضربِ قوسـيْنِ، وغيرُ ذلكَ منَ الطرائقِ التي تعرَّفْناها سابقًا.

أخطاء مفاهيمية:

قد لا يهتم الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بضبط الآلة الحاسبة على نظام الدرجات، أو يعانون صعوبة في ذلك، أو في استعمالها لإيجاد معكوس النسب المثلثية؛ لذا قدِّم لهم المساعدة اللازمة فرادى، مراعيًا اختلاف مسميات بعض المفاتيح بحسب نوع الآلة الحاسبة.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $x \approx 228.590^\circ, x \approx 311.409^\circ$

b) $x \approx 35.265^\circ, x \approx 144.735^\circ$

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2، وذكِّرهم بمفهوم معكوس النسبة المثلثية، ومفهوم زاوية المرجع.
- برِّر للطلبة استعمال θ بدلًا من $3x$ (لتسهيل الحل) في الفرع 2، واحرص على التوضيح للطلبة كيفية تغيُّر المجال في حالة الاستبدال.
- تأكَّد من امتلاك الطلبة المهارات المتعلقة باستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد معكوس النسبة المثلثية.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في حل المعادلات، مثل $\sin(2x) = 1$، فيقسمون طرفي المعادلة على العدد 2؛ لذا أخبرهم أنه يمكن حلها باستعمال θ بدلًا من $2x$، وذكِّرهم بضرورة التحقُّق من صحة الحل.

يمكن تدريب الطلبة على حل مزيد من الأسئلة بتوجيههم إلى حل المعادلات الآتية:

1. $\cos(2x) = -0.5$
2. $\sin(4x) - 1 = 0$
3. $1 + 4\cos(3x) = -2$

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة أنه قد يُطلَب في السؤال درجة محددة من دقة التقريب يجب مراعاتها، وأنه في حال عدم تحديد دقة التقريب في السؤال فستُقرَّب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

مثال 3

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0° \le x < 360°$:

1 $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحوي هذهِ المعادلةُ نسبتيْنِ مثلثتيْنِ، ويُلاحَظُ أنَّ $\sin x$ تكرَّرَ في حَدَّيِ المعادلةِ، ما يعني أنَّها تُشْبِهُ المعادلةَ $3yz - 2y = 0$؛ لذا يُمكِنُ تحليلُها بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x (3 \cos x - 2) = 0$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0 , \sin x = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

وبذلكَ أتوصَّلُ إلى معادلتيْنِ بسيطتيْنِ، ثمَّ أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ:

$\sin x = 0$ المعادلةُ الأولى

$x = 0°, x = 180°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلةُ الثانيةُ

$3 \cos x = 2$ بإضافةِ 2 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 3

$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ تعريفُ معكوسِ جيبِ التمامِ

$x = 48.2°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ جيبَ التمامِ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الرابعِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:
$x = 360° - 48.2° = 311.8°$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $0°, 180°, 48.2°, 311.8°$

أَتذكَّرُ
يكونُ جيبُ تمامِ الزاويةِ موجبًا في الربعيْنِ: الأولِ، والرابعِ.

2 $3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1$

أجعلُ الطرفَ الأيمنَ منَ المعادلةِ صفرًا بطرحِ $(2 \sin x + 1)$ منَ الطرفيْنِ:

$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

هذهِ المعادلةُ تُشْبِهُ المعادلةَ الجبريةَ $3y^2 - 2y - 1 = 0$؛ لذا يُمكِنُ حَلُّها بالتحليلِ إلى العواملِ:

$(3 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليلِ إلى العواملِ

$3 \sin x + 1 = 0 , \sin x - 1 = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

مثال 3

- ناقِش الطلبة في فرعي المثال 3، مُذكِّرًا إيّاهم بطرائق تحليل العبارة التربيعية.
- ركِّز في الفرع 1 على مهارة إخراج العامل المشترك، وخاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.
- ذكِّر الطلبة بالمميز في الفرع 2، مُركِّزًا على تحليل العبارة التربيعية إلى حاصل ضرب قوسين، وذكِّرهم بإشارتي القوسين اعتمادًا على إشارتي الحد الأوسط والحد الأخير.
- تحقَّق من صحة الحل بتعويض الحلول جميعها بالمعادلة الأصلية.

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة أنه للتحقق من صحة الحل يجب التعويض في المعادلة الأصلية التي بدأنا حلها، وأنه لا يجوز التعويض بصورها المكافئة التي نحصل عليها في أثناء الحل؛ لأن الاختصار قد يؤدي إلى إهمال بعض الحلول.

! أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في حل المعادلة، مثل: $\sin x \cos x + \sin x = 0$، فيقسمون على $\sin x$؛ لذا نبِّههم إلى الخطأ الذي وقعوا فيه، وأن ذلك يُؤثِّر في عدد حلول المعادلة الناتجة.

المعادلةُ الأولى: $3\sin x + 1 = 0$

بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ: $3\sin x = -1$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 3: $\sin x = -\frac{1}{3}$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ: $x = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وتجاهلِ الإشارةِ السالبةِ: $x = 19.5^\circ$

يُمثِّلُ ما سبقَ الزاويةَ المرجعيةَ للحَلِّ، لا الحَلَّ نفسَهُ؛ لأنَّ الجيبَ سالبٌ في الربعيْنِ: الثالثِ، والرابعِ.

حَلُّ هذهِ المعادلةِ في الربعِ الثالثِ هوَ: $180^\circ + 19.5^\circ = 199.5^\circ$

وحَلُّها في الربعِ الرابعِ هوَ: $360^\circ - 19.5^\circ = 340.5^\circ$

والآنَ، أَحُلُّ المعادلةَ $\sin x - 1 = 0$:

بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ: $\sin x = 1$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ: $x = \sin^{-1}(1)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ: $x = 90^\circ$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$: انظر الهامش

a) $4\sin x \tan x + 3\tan x = 0$

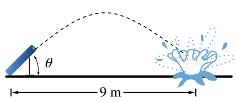
b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

مثال 4: من الحياة

مِدْفعُ هواءٍ يميلُ عنِ الأرضِ بزاويةٍ قياسُها θ. انطلقَ منْ فُوَّهتِهِ بالونٌ مملوءٌ بالماءِ بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 12 m/s، فسقطَ على بُعْدِ 9 m منَ المِدْفعِ. إذا كانَتِ العلاقةُ التي تُمثِّلُ المسافةَ الأفقيةَ d التي يقطعُها البالونُ هيَ:

$$d = \frac{1}{10} v^2 \sin 2\theta$$

حيثُ v سرعةُ البالونِ الابتدائيةُ، فما قيمةُ θ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ؟



مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي ينمذج موقفًا حياتيًّا تُطبَّق فيه الحسابات المتعلقة بحل المعادلات المثلثية، مؤكِّدًا وجود العديد من المواقف الحياتية التي تُطبَّق فيها مثل هذه الحسابات. **(يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح لمدفع الماء، ومسار القذيفة).**
- ذكِّر الطلبة بأن الهدف من فرض $x = 2\theta$ هو تسهيل الحسابات.
- تحقَّق من صحة الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

إجابة (أتحقق من فهمي 3):

a) $x = 0^\circ, x = 180^\circ, x \approx 228.59^\circ, x \approx 311.41^\circ$

b) $x = 0^\circ, x = 360^\circ, x = 60^\circ, x = 300^\circ$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسـائل**)، واطلـب إليهم حـل المسـائل، وتابع أعمالهم.
- ركِّز على معالجـة الأخطاء المفاهيميـة أو الأخطاء المتعلقة بالمهارات الحسـابية يدويًّا، أو باسـتعمال الآلة الحاسبة، ثم ناقشها على اللوح.
- ركِّـز على معالجة الأخطـاء المفاهيمية، أو الأخطاء المتعلقة بمهارات حل المعادلات المثلثية.

الخطوةُ 1: أُعوِّضُ القيمَ المعطاةَ في المسـألةِ في المعادلةِ المعطاةِ، ثمَّ أَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ.

عندَ تعويضِ القيمِ المعطاةِ، أتوصَّلُ إلى المعادلةِ: $9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin 2\theta$

الخطوةُ 2: لتسهيلِ الحساباتِ، أَفترضُ أنَّ $x = 2\theta$ ، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ:

$9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin x$ المعادلةُ

$90 = 144 \sin x$ بضربِ الطرفيْنِ في 10، والتبسيطِ

$\sin x = \frac{90}{144}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 144

$x = sin^{-1} \frac{90}{144} = 38.7°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، والتقريبِ إلى أقربِ عُشْرٍ

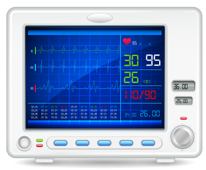
الخطوةُ 3: أَجِدُ الحَلَّ الآخرَ في الربعِ الثاني، وهوَ: $180° - 38.7° = 141.3°$

الخطوةُ 4: أَجِدُ الآنَ قيمةَ θ:

$x = 2\theta$ العلاقةُ بينَ x وَ θ

$\theta = \frac{38.7°}{2} = 19.4°$ أو $\theta = \frac{141.3°}{2} = 70.7°$ بالقسمةِ على 2، والتعويضِ

إذنْ، يصنعُ المِدْفعُ معَ الأرضِ زاويةً قياسُها 19.4°، أوْ 70.7° تقريبًا.



الكهرباءُ موجودةٌ في جسـمِ الإنسـانِ أيضًـا؛ فعضلاتُ القلبِ مثـلًا تنقبـضُ بتأثيرِ تياراتٍ كهربائيـةٍ تصلُ إليها عبـرَ العُقـدِ والوصـلاتِ العصبيةِ.

أتحقق من فهمي

فيزياءُ: فـرقُ الجهدِ E (بالفولت) في دارةٍ كهربائيةٍ يُعطـى بالعلاقةِ: $\boldsymbol{E = 20 \cos (180t)}$ ، **حيثُ t الزمنُ (بالثواني):** انظر الهامش

a) أَفتـرِضُ أنَّ $x = 180\ t$ ، وأَحُـلُّ المعادلـةَ $12 = 20 \cos x$ ، علمًـا بـأنَّ $0° \le x \le 360°$.

b) أَجِـدُ الزمـنَ t (حيثُ $0 \le t \le 2$) عندما يكونُ فرقُ الجهـدِ 12 volt، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ منَ الثانيةِ.

إجابة (أتحقق من فهمي 4):

a) $x \approx 53.13°, x \approx 306.87°$

b) $t \approx 0.30, t \approx 1.70$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

1) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x = 45^\circ, x = 135^\circ$

2) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad x = 30^\circ, x = 210^\circ$

3) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = 30^\circ, x = 330^\circ$

4) $7 + 9\cos x = 1$ $\quad x \approx 131.81^\circ, x \approx 228.19^\circ$

5) $2\sin x + 1 = 0$ $\quad x = 210^\circ, x = 330^\circ$

6) $1 - 2\tan x = 5$ $\quad x \approx 116.57^\circ, x \approx 296.57^\circ$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 90^\circ$:

7) $5 - 2\cos(4x) = 4$ انظر ملحق الإجابات

8) $3 + 4\tan(2x) = 6$ $\quad x \approx 18.435^\circ$

9) $13\sin(3x) + 1 = 6$ $\quad x \approx 7.54^\circ, x \approx 52.46^\circ$

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ]$:

10) $2(\sin x - 2) + 1 = 3\sin x$ $\quad \phi$

11) $\tan x - 3(2\tan x - 1) = 10$ $\quad x \approx 125.4^\circ, x \approx 305.54^\circ$

12) $15\tan x - 7 = 5\tan x - 3$ $\quad x \approx 21.80^\circ, x \approx 201.80^\circ$

13) $5(\cos x - 1) = 6 + \cos x$ $\quad \phi$

14) $\tan^2 x - 9\tan x + 20 = 0$ انظر ملحق الإجابات

15) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ انظر ملحق الإجابات

16) $4\sin^2 x - 3\sin x = 1$ انظر ملحق الإجابات

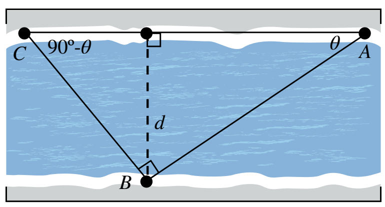
17) $2\sin^2 x - 1 = 0$ انظر ملحق الإجابات

18) $4\cos^2 x - 4 = 15\cos x$ $\quad x \approx 104.48^\circ, x \approx 255.52^\circ$

19) $\cos x = \sin x$ $\quad x = 45^\circ, x = 225^\circ$

20) **ساعاتٌ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

21) **سِباحةٌ:** سبحَ حامدٌ مسافةَ 90 m منَ النقطةِ A على الضفةِ الشـمالية لنهرٍ إلى النقطةِ B على الضفةِ المقابلةِ، ثمَّ دارَ بزاويةٍ قائمةٍ، وسبحَ مسافةَ 60 m إلى نقطةٍ أُخرى C على الضفةِ الشماليةِ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CAB هوَ θ، وقياسُ الزاويةِ ACB هوَ $(90^\circ - \theta)$، وطولُ العمودِ منَ B إلى CA يساوي عرضَ النهرِ d، فأُعبِّرُ عنْ d بدلالةِ θ مرَّةً، وبدلالةِ $(90^\circ - \theta)$ مرَّةً أُخرى، ثمَّ أَكتبُ معادلةً وأَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ، ثمَّ أَجِدُ عرضَ النهرِ. انظر ملحق الإجابات



مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى حل المسألة 24 ضمن مجموعات ثنائية؛ على أن تضم كل مجموعة طالبًا من ذوي التحصيل فوق المتوسط، وآخر من ذوي التحصيل دون المتوسط، وامنحهم وقتًا كافيًا للتوصُّل إلى أي الحلين كان صائبًا مع تبرير الإجابة، ثم اطلب إلى أحد الطلبة توضيح ما توصَّل إليه أمام باقي الزملاء.
- وجِّه الطلبة إلى حل مسألتي التحدي 26، 25 ضمن مجموعات صغيرة غير متجانسة، وعيِّن لكل مجموعة قائدًا يُوزِّع المهام على باقي أفراد مجموعته، ونظِّم مسابقة بين أفراد المجموعات لحل المسألتين، وعزِّز أفراد المجموعات ذوي الأداء المتميز، ثم اطلب إلى طالبين من كل مجموعة مناقشة الحل أمام الزملاء.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 21 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

المفاهيم العابرة:

في أثناء حل السؤال 24 في بند (**أكتشف الخطأ**)، عزِّز الوعي **بالقضايا الإنسانية، وبناء الشخصية** (احترام الآخر، وتقبُّله، والمرونة) عن طريق التوضيح للطلبة أن انتقاد حل شخص ما، أو الاختلاف معه في الرأي، لا يجب أن ينعكس على قبول هذا الشخص، وأن النقد هو لسلوكه لا شخصه.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط إلى حل المعادلة $\sin(2x) = 1$ بيانيًّا.

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب، وأنه يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية الخاصة بالمشروع، والتأكُّد أن جميع عناصر المشروع موجودة يوم العرض.

6 الختام

- في نهاية الدرس وزِّع على كل طالب ورقتين لاصقتين مختلفتي اللون، ثم اطلب إلى كلٍّ منهم أن يكتب في إحدى الورقتين (الخضراء مثلًا) مسألة أعجبته في الدرس، وأتقن حلها، ثم يكتبوا في الورقة الأُخرى (الصفراء مثلًا) مسألة أُخرى تحتاج إلى مزيد من التدريب، ثم اجمع الأوراق قبل خروجك من الصف.

22 **دولابٌ:** يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ في دولابٍ دوّارٍ بالمعادلةِ: $h = 27 - 25\cos\theta$، حيثُ h الارتفاعُ بالأمتارِ، وَ θ قياسُ الزاويةِ التي دارَها الدولابُ. متى يكونُ ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ 49 m؟ انظر ملحق الإجابات

23 **حركةُ مقذوفاتٍ:** المسافةُ الأفقيةُ التي تقطعُها مقذوفةٌ في الهواءِ (منْ دونِ افتراضِ وجودٍ لمقاومةِ الهواءِ) تُعطى بالمعادلةِ: $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$، حيثُ: v_0 السرعةُ الابتدائيةُ، وَ θ الزاويةُ التي تُطلَقُ بها المقذوفةُ، وَ g تسارُعُ الجاذبيةِ الأرضيةِ ($9.8\ m/s^2$). إذا قُذِفَتْ كرةُ بيسبول بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 40 m/s، فما الزاويةُ التي تُوجَّهُ بها الرميةُ لكيْ تقطعَ الكرةُ مسافةً أفقيةً مقدارُها 110 m قبلَ سقوطِها على الأرضِ؟ ما أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ أنْ تصلَها الكرةُ إذا قُذِفَتْ بهذهِ السرعةِ الابتدائيةِ؟ انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ سعيدٍ وعليٍّ المعادلةَ: $2\sin x \cos x = \sin x$، حيثُ: $0° \leq x < 360°$:

سعيدٌ:

الحلولُ هيَ: $0°, 60°, 180°, 300°$

لأنَّ:

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0° , 180°$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 60° , 300°$

عليٌّ:

الحَلّانِ هما: $60°, 300°$

لأنَّ:

$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 60° , 300°$

أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر ملحق الإجابات

25 **تحدٍّ:** أَحُلُّ المعادلةَ: $2\sin x \cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$، علمًا بأنَّ $0° \leq x \leq 360°$. انظر ملحق الإجابات

26 **تحدٍّ:** أُحدِّدُ عددَ حلولِ المعادلةِ: $\cos x - \sin x - 1 = 0$، حيثُ: $0° \leq x < 360°$. انظر ملحق الإجابات

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $\cos\theta = -0.5$، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ يقعُ في:

a) الربعِ الثاني.   b) الربعيْنِ: الثاني، والثالثِ.

c) الربعِ الرابعِ.   d) الربعيْنِ: الثاني، والرابعِ.

2 إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$، فإنَّ قيمةَ $\sin\theta$ هيَ:

a) $-\frac{40}{41}$ b) $\frac{9}{40}$

c) $-\frac{9}{41}$ d) $\frac{9}{41}$

3 قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ 230° هوَ:

a) 130° b) 40°

c) 50° d) 140°

4 إذا كانَتْ $90^\circ < x < 180^\circ$، وكانَ $\sin x = \frac{8}{17}$، فإنَّ قيمةَ $\tan x$ هيَ:

a) $-\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{15}$

c) $\frac{15}{17}$ d) $-\frac{15}{8}$

5 حَلُّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هوَ:

a) 0° b) 90°

c) 270° d) 360°

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ x المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ: 7–11 انظر ملحق الإجابات

6 $(0.6, 0.8)$ 7 $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

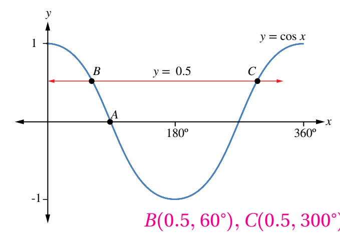
8 $(-1, 0)$ 9 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

10 $(0, 1)$ 11 $(-0.96, 0.28)$

يُبيِّنُ الشكلُ التالي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المثلثيِّ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = 0.5$ في النقطتيْنِ B وَ C:

12 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A. $A(0, 90^\circ)$

13 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ: B، وَ C.



$B(0.5, 60^\circ)$, $C(0.5, 300^\circ)$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $\sin x = \frac{-1}{2}, 270^\circ \leq x \leq 360^\circ$ 14–17 انظر ملحق الإجابات

15 $\cos x = 0.4$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

16 $\tan x = 3$, $180^\circ \leq x \leq 360^\circ$

17 $\sin x = -\cos x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

التقويم الختامي:

- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة: 35، 34، 33 وردت ضمن أسئلة الاختبارات الدولية، أو وردت مسائل مشابهة لها.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMMS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية - وفق هذا البرنامج- يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعيَّن عليك - عزيزي المعلِّم- تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

تستغرق الإجابة عن أسئلة الاختبار حصتين (90 دقيقة).

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\sin 140^\circ$ ≈ 0.6428

19 $\cos 173^\circ$ ≈ -0.9925

20 $\tan 219^\circ$ ≈ 0.8098

21 $\sin 320^\circ$ ≈ -0.6428

22 $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$ 0

23 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$ 1

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

24 $3\cos^2 x - 1 = 0$ 24–28 انظر ملحق الإجابات

25 $\sin x = -1.3212 \cos x$

26 $4 + 5\sin^2 x = 9\sin x$

27 $\tan x = 4\sin x$

28 $3\tan^2 x \cos x = 3\tan^2 x$

29 إذا كانَتْ x زاويةً في الربعِ الأولِ، وكانَ $\sin x + \sin(180^\circ - x) = 1.4444$ فأَجِدُ قياسَ الزاويةِ x. انظر ملحق الإجابات

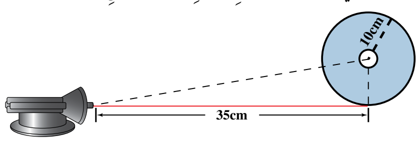
30 **لعبةُ مِدفعٍ:** يُطلِقُ مِدفعُ قذائفَ بالوناتٍ مائيةً في مسابقةٍ للتسليةِ. إذا كانَ البُعْدُ الأفقيُّ لقذيفةٍ أُطلِقَتْ منَ المِدفعِ بزاويةٍ قياسُها x معَ المستوى الأفقيِّ، وبسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 7 m/s، يُعطى بالأمتارِ حسبَ العلاقةِ: $d = 7 + 2\sin\left(\frac{3x}{5}\right)$، فما المسافةُ الأفقيةُ التي قطعَتْها قذيفةٌ أُطلِقَتْ بزاويةٍ مقدارُها 50°؟ 8 m

31 أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $y = 4(\sin x)^2 - 3$، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

$x = 60^\circ, x = 120^\circ,$

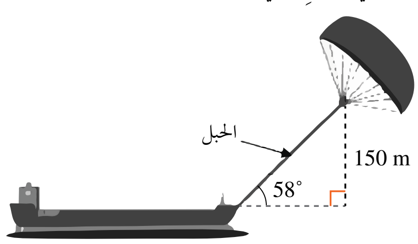
$x = 240^\circ, x = 300^\circ$

32 **خصائصُ الضوءِ:** في تجربةِ علومٍ لاكتشافِ خصائصِ الضوءِ، وُضِعَ مصدرٌ ضوئيٌّ ليزريٌّ على بُعْدِ 35 cm منْ قرصٍ دائريٍّ مثقوبٍ منْ مركزِهِ، وكانَ طولُ نصفِ قُطْرِهِ 10 cm كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ زاويةَ الشعاعِ الذي يمرُّ خلالَ ثقبِ مركزِ هذا القرصِ. $\theta \approx 15.95^\circ$



تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

33 لاستغلالِ طاقةِ الرياحِ، وخفضِ استهلاكِ وقودِ الديزلِ، تُربَطُ أشرعةٌ طائرةٌ بالسفينةِ ترتفعُ 150 m فوقَ مستوى ظهرِ السفينةِ. يجبُ أنْ يكونَ طولُ حبلِ الشراعِ الطائرِ تقريبًا لكيْ يسحبَ السفينةَ بزاويةِ 58°، ويكونَ على ارتفاعٍ رأسيٍّ مقدارُهُ 150 m كما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ الآتي:



a) 177 m

b) 283 m

c) 160 m

d) 244 m

كتاب التمارين

الدرسُ 1
النسبُ المثلثيةُ

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ: 1–4 انظر ملحق الإجابات

1) $170°$ 2) $240°$ 3) $315°$ 4) $85°$

أُحدِّدُ الربعَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ:

5) $245°$ الربع الثالث 6) $275°$ الربع الرابع 7) $130°$ الربع الثاني 8) $26°$ الربع الأول

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قَطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ: 9–12 انظر ملحق الإجابات

9) $P(0, -1)$ 10) $P(1, 0)$ 11) $P\left(\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right)$ 12) $P\left(\frac{-60}{61}, \frac{-11}{61}\right)$

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

13) $\sin\theta < 0$ الربع الثالث، أو الربع الرابع

14) $\cos\theta < 0$ الربع الثاني، أو الربع الثالث

15) $\cos\theta < 0 , \tan\theta > 0$ الربع الثالث

16) $\tan\theta < 0 , \cos\theta < 0$ الربع الثاني

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ: 17–20 انظر ملحق الإجابات

17) $\cos\theta = -\frac{1}{12} , 90° < \theta < 180°$

18) $\tan\theta = -2 , -1 < \sin\theta < 0$

19) $\sin\theta = 0.6 , \tan\theta < 0$

20) $\cos\theta = 0.45 , 270° < \theta < 360°$

جلسَ زيدٌ في لعبةِ الدولابِ على المقعدِ الذي تُمثِّلُهُ النقطةُ $(0, 1)$ على دائرةِ الوحدةِ. إذا كانَ الدولابُ يدورُ عكسَ حركةِ عقاربِ الساعةِ، ويُكمِلُ دورةً واحدةً في دقيقتيْنِ: 21–22 انظر ملحق الإجابات

21) فما إحداثيا النقطةِ على دائرةِ الوحدةِ التي تُمثِّلُ مقعدَ زيدٍ بعدَ 60 ثانيةً؟

22) فما إحداثيا النقطةِ على دائرةِ الوحدةِ التي تُمثِّلُ مقعدَ زيدٍ بعدَ 90 ثانيةً؟

الدرسُ 2
النسبُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

أَجِدُ الزاويةَ المرجعيةَ لكلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

1) $117°$ $63°$ 2) $250°$ $70°$ 3) $215°$ $35°$ 4) $300°$ $60°$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

5) $\sin 170°$ ≈ 0.1736 6) $\tan 230°$ ≈ 1.1918 7) $\cos 250°$ ≈ -0.3420 8) $\tan 310°$ ≈ -1.1918

أَجِدُ القيمةَ الدقيقةَ لكلٍّ ممّا يأتي (منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ):

9) $\cos 135°$ $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ 10) $\sin 240°$ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ 11) $\tan 315°$ -1 12) $\sin 210°$ $\frac{-1}{2}$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

13) $\sin 40° + \sin 130° + \sin 220° + \sin 310°$ 0

14) $\sin 60° - \sin 120° + \sin 180° - \sin 240° + \sin 300° - \sin 360°$ 0

أَجِدُ في كلٍّ ممّا يأتي زاويةً أُخرى بينَ $0°$ وَ $360°$، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

15) $80°$ $100°$ 16) $146°$ $34°$ 17) $215°$ $325°$ 18) $306°$ $234°$

أَجِدُ في كلٍّ ممّا يأتي زاويةً أُخرى بينَ $0°$ وَ $360°$، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

19) $10°$ $350°$ 20) $125°$ $235°$ 21) $208°$ $152°$ 22) $311°$ $49°$

أَجِدُ في كلٍّ ممّا يأتي قيمةَ (أوْ قيمَ) θ، علمًا بأنَّ $0° \le \theta \le 360°$: 23–30 انظر ملحق الإجابات

23) $\sin\theta = 0.75$ 24) $\cos\theta = 0.65$ 25) $\tan\theta = -1$ 26) $\sin\theta = -0.87$

27) $\sin\theta = 0.812$ 28) $\tan\theta = -\frac{2}{3}$ 29) $\cos\theta = -0.25$ 30) $\tan\theta = 5$

31) **ألعابٌ**: في دولابِ مدينةِ الألعابِ يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ بعدَ x دقيقةٍ منْ بدءِ الدورانِ بالعلاقةِ: $h = 14.5 - 12.5\cos(36x)$، حيثُ h الارتفاعُ عنْ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ. أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ بعدَ 7.5 دقائقَ منْ بدءِ الدورانِ. انظر ملحق الإجابات

32) **حسابٌ فَلكيٌّ**: يُقدَّرُ في إحدى المدنِ عددُ ساعاتِ النهارِ y في كلِّ يومٍ منْ أيامِ السنةِ حسبَ رقمِ اليومِ d منَ السنةِ بالعلاقةِ: $y = 3\sin(d - 81) + 12$. ما عددُ ساعاتِ النهارِ في هذهِ المدينةِ يومَ الأولِ منْ شهرِ آبَ (اليومُ رقمُ 213)؟ انظر ملحق الإجابات

الدرسُ 3
تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ

أرسمُ منحنى كلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، مُحدِّدًا الفترةَ التي يكونُ فيها الاقترانُ موجبًا، والفترةَ التي يكونُ فيها سالبًا: 1–3 انظر ملحق الإجابات

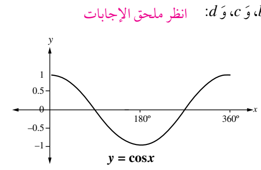
1) $y = \sin x,\ 90° \le x \le 180°$

2) $y = \cos x,\ 0° \le x \le 180°$

3) $y = \tan x,\ 0° \le x \le 180°$

4) أرسمُ الاقترانيْنِ $y = \sin x$، وَ $y = \cos x$ في الفترةِ $[0°, 360°]$ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. ماذا أُلاحِظُ على المنحنييْنِ؟ انظر ملحق الإجابات

5) أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ الآتيَ لأَجِدَ قيمَ: a، وَ b، وَ c، وَ d: انظر ملحق الإجابات

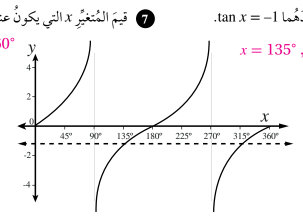


$\cos 0° = \cos a°$
$\cos 30° = \cos b°$
$\cos 45° = \cos c°$
$\cos 90° = \cos d°$

يظهرُ في الشكلِ الآتي التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $y = \tan x$ في الفترةِ $[0°, 360°]$. أستعملُ الشكلَ لأَجِدَ:

6) قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\tan x = -1$. $x = 135°, x = 315°$

7) قيمَ المُتغيِّرِ x التي يكونُ عندَها $\tan x = 0$. $x = 0°, x = 180°, x = 360°$



الدرسُ 4
حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ المثلثيةِ الآتيةِ في الفترةِ $[0°, 360°]$: 1–24 انظر ملحق الإجابات

1) $\sin x = \frac{1}{3}$ 2) $\tan x = \sqrt{3}$ 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$

5) $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 6) $2\sin x + 3 = 1$ 7) $\sqrt{2}\cos x + 1 = 2$ 8) $\sqrt{3}\tan x + 4 = 1$

9) $3\tan x + 2 = 7 - 2\tan x$

10) $5 - 3\sin x = \sin x + 1$

11) $2(3\sin x + 1) + 2 = 4\sin x + 5$

12) $3(2 - \cos x) + 4 = 5\cos x + 2$

13) $3 + 2\cos(3x) = 1 , 0° < x < 120°$

14) $5 + 2\tan(4x) = 7 , 0° < x < 90°$

15) $4\sin x\cos x + 3\sin x = 0$

16) $2\cos x\sin x = \cos x$

17) $4\sin^2 x = 1$

18) $\tan^2 x - 9 = 0$

19) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

20) $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

21) $2\tan^2\theta - 5\tan\theta - 3 = 0$

22) $6\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0$

23) $9\cos^2 x - 9\cos x + 2 = 0$

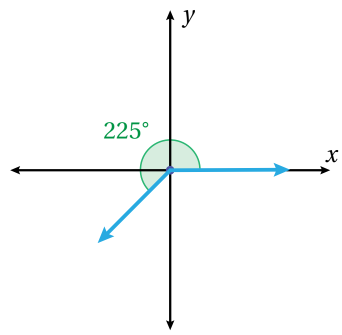
24) $\tan^2\theta + 4\tan\theta - 12 = 0$

25) **قياساتٌ**: يرتكزُ سُلَّمٌ طولُهُ 5 m على أرضٍ أفقيةٍ وحائطٍ رأسيٍّ. إذا كانَ أسفلُ السُّلَّمِ يبعدُ 1.5 m عنِ الحائطِ، فما ارتفاعُ رأسِ السُّلَّمِ عنِ الأرضِ؟ ما قياسُ الزاويةِ التي يصنعُها السُّلَّمُ معَ الأرضِ؟ انظر ملحق الإجابات

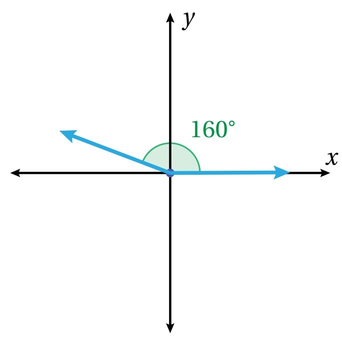
26) **ساريةٌ**: رصدَ سامرٌ قمَّةَ ساريةِ علمٍ ارتفاعُها عنِ الأرضِ 12 m منْ نقطةٍ على الأرضِ تبعدُ 30 m عنْ قاعدةِ الساريةِ. إذا كانَ طولُ سامرٍ 1.75 m، فما قياسُ الزاويةِ التي ينظرُ فيها سامرٌ إلى قمَّةِ الساريةِ؟ انظر ملحق الإجابات

الدرس 1:

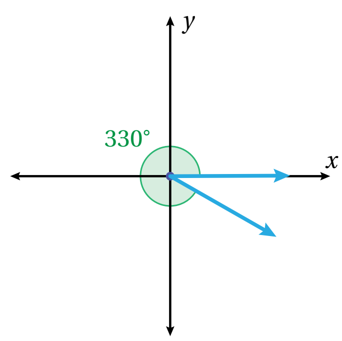
1)



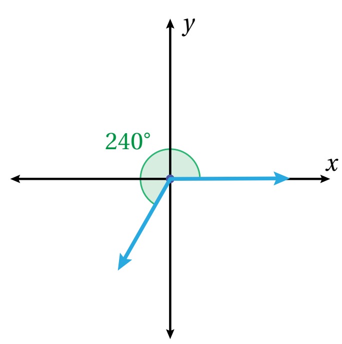
2)



3)



4)



21) $\cos\theta = 0, \sin\theta = -1$, $\tan\theta$ $u.d$

22) $\cos\theta = 0.5, \sin\theta = 0.5\sqrt{3}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$

23) $\cos\theta = \frac{-8}{17}$, $\sin\theta = \frac{15}{17}$, $\tan\theta = \frac{-15}{8}$

24) $\cos\theta = \frac{20}{29}$, $\sin\theta = \frac{-21}{29}$, $\tan\theta = \frac{-21}{20}$

25) $(\frac{3}{4})^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\frac{9}{16} + (\cos\theta)^2 = 1$

$(\cos\theta)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $90° < \theta < 180°$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

26) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0.78 \Rightarrow \sin\theta = 0.78\cos\theta$

$(0.78\cos\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$(1.6084\cos\theta)^2 = 1 \Rightarrow \cos\theta \approx \pm 0.62$

$\sin\theta < 0, \tan\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta \approx -0.62$

$\sin\theta = 0.78 \times (-0.62) \approx -0.48$

27) $(\sin\theta)^2 + (-0.75)^2 = 1$

$(\sin\theta)^2 + 0.5625 = 1$

$(\sin\theta)^2 = 1 - 0.5625 = 0.4375$

$\sin\theta \approx \pm 0.66$

$\cos\theta < 0, \tan\theta < 0 \Rightarrow \sin\theta > 0$

$\Rightarrow \sin\theta \approx 0.66$

$\tan\theta = -\frac{0.66}{0.75} = 0.88$

28) $(-0.87)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$(\cos\theta)^2 = 1 - 0.7569 = 0.2431$

$\cos\theta \approx \pm 0.49$, $270° < \theta < 360°$

$\Rightarrow \cos\theta = 0.49$

$\tan\theta = -\frac{0.87}{0.49} \approx -1.76$

29) أكبر قيمــة لجيب الزاوية هي 1، وعندئذٍ يكون قياس الزاوية هو $90°$، وأصغر قيمة هــي $1-$، وعندئذٍ يكون قيــاس الزاوية هو $270°$؛ لأن ضلع انتهاء الزاوية $90°$ يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(0,1)$، وضلع انتهاء الزاوية $270°$ يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(0,-1)$.

30) $\sin\theta + \cos\theta = -1.4$ ؛ لأن $\tan\theta > 0$ ، وهــذا يعنــي أن الزاوية تقع في الربع الثالث، حيث تكــون قيمة كل من جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية سالبة.

31) في الربع الثاني يكون:

$$\sin\theta > 0 \,,\, \cos\theta < 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta < |\cos\theta|$$

$$\sin\theta = |\cos\theta| \Rightarrow \theta = 135°$$

$$\sin 120° + \cos 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2} > 0$$

$$\sin 150° + \cos 150° = \frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta + \cos\theta < 0 \,,\, 135° < \theta < 180°$$

الدرس 2:

19) بما أن أكبر قيمة لجيب الزاوية هي 1 عندما يكون قياسها $90°$، فإن:

$$(x-4)\,(30) = 90$$

$$\Rightarrow x - 4 = 3 \Rightarrow x = 7$$

$$\therefore y = 3\sin(7-4)(30°) + 8 = 11 \text{ m}$$

أقصى عمق للنهر هو 11 m، ويحدث عند الســاعة السابعة صباحًا، ويتكرَّر ذلك بعد كل 12 ساعة لاحقة.

20) $\sin 210° = -\frac{1}{2}$

$\sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

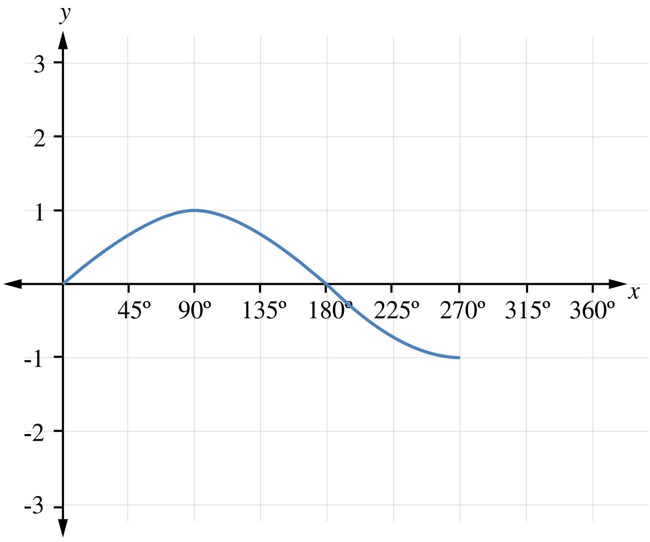
$\Rightarrow P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

21) إجابة ســندس غير صحيحة؛ لأنه لا يمكن أن تكون قيمة الجيب لأي زاوية أكبر من 1

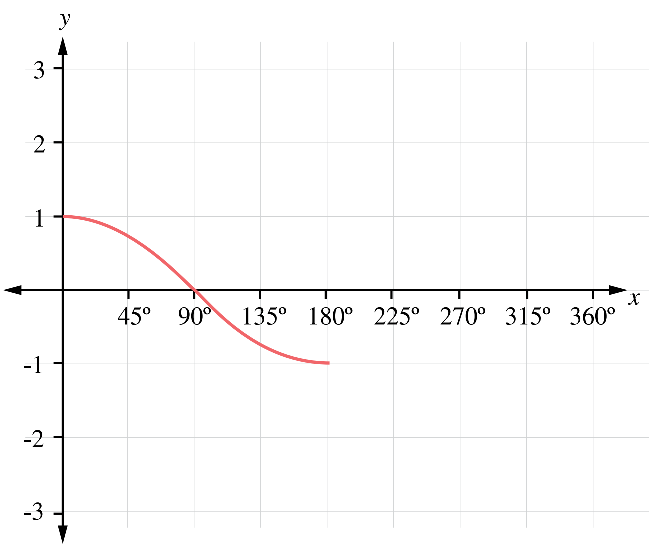
22) 0؛ لأنه يقابل القيم الموجبة لجيــوب تمام الزوايا في الربعين: الأول والرابع قيمة سالبة لجيوب تمام الزوايا المنعكسة في الربعين: الثالث والثاني على الترتيب.

الدرس 3:

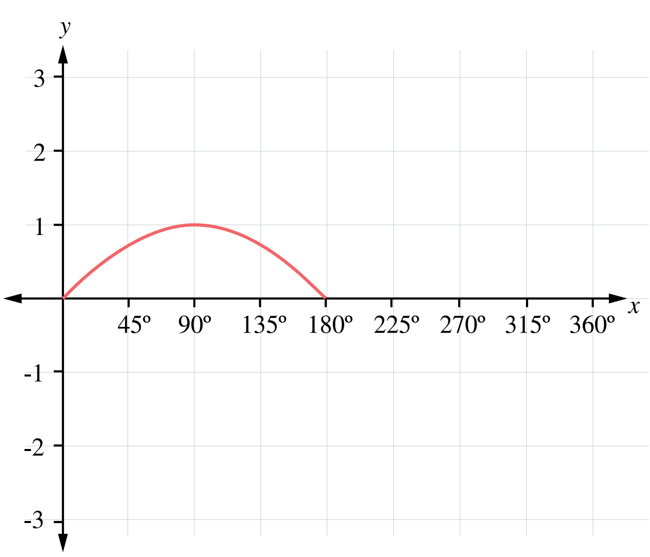
1)



2)



3)



الدرس 4:

7) $5-2\cos(4x) = 4, 0° \le x \le 90°$

$-2\cos(4x) = -1$

$\cos(4x) = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $0° \le \theta \le 360°$

$\Rightarrow \theta = 60°$, $\theta = 300°$

$\Rightarrow x = 15°$, $x = 75°$

14) $(\tan x - 4)(\tan x - 5) = 0$

$\tan x = 4 \Rightarrow x \approx 75.96°$, $x \approx 255.96°$

$\tan x = 5 \Rightarrow x \approx 78.69°$, $x \approx 258.69°$

15) $\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$, $x = 270°$

$\cos x = 0.5 \Rightarrow x = 60°$, $x = 300°$

16) $(\sin x - 1)(4\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90°$

$\sin x = -0.25 \Rightarrow x \approx 194.48°$, $x \approx 345.52°$

17) $x = 45°$, $x = 135°$

$x = 225°$, $x = 315°$

20) $118 = -60\cos(30x) + 110$

$\Rightarrow -60\cos(30x) = 8$

$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-2}{15} \Rightarrow \theta \approx 97.66°$ or $262.34°$

$\Rightarrow x \approx 3.26°$, $x \approx 8.74°$

21) $d = 90\cos\theta$, $d = 60\cos(90° - \theta)$

$\Rightarrow 90\cos\theta = 60\cos(90° - \theta)$

$\Rightarrow 90\cos\theta = 60\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \theta \approx 56.31°$

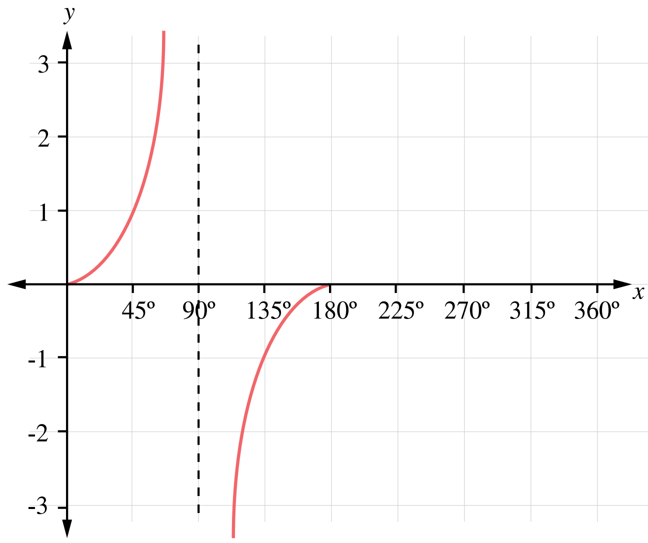
$d = 90\cos 56.31° \approx 50$ m

22) $49 = 27 - 25\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = -0.88$

$\Rightarrow \theta \approx 151.64°$ or $\theta \approx 208.36°$

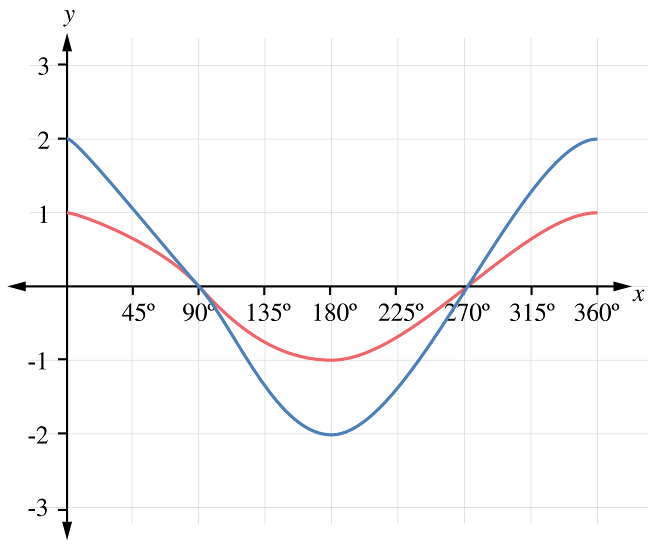
4)



7) $a = 180°$, $b = 360°$, $c = 150°$, $d = 120°$, $e = 330°$

8) $e = 180°$, $f = 360°$, $g = 225°$, $h = 240°$

14)



الفرق بينهما في أكبر قيمة، وأصغر قيمة.

14) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

15) $\sin x = \pm\sqrt{0.84}$, $\tan x = \pm\frac{\sqrt{0.84}}{0.4}$

16) $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$, $\sin x = \frac{-3}{\sqrt{10}}$

17) $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan x = -1$

24) $x \approx 54.74°$, $x \approx 305.26°$

25) $x \approx 127.12°$, $x \approx 307.12°$

26) $(\sin x - 1)(5\sin x - 4) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90°$

$\sin x = 0.8 \Rightarrow x \approx 53.13°$, $x \approx 126.87°$

27) $\frac{\sin x}{\cos x} = 4\sin x \Rightarrow \sin x = 4\sin x\cos x$

$\Rightarrow \sin x - 4\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \sin x\,(1 - 4\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0°$, $x = 180°$

$\cos x = 0.25 \Rightarrow x \approx 75.52°$, $x \approx 284.48°$

28) $3\tan^2 x\cos x - 3\tan^2 x = 0 \Rightarrow 3\tan^2 x\,(\cos x - 1) = 0$

$\tan^2 x = 0 \Rightarrow x = 0°$, $x = 180°$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0°$

29) $2\sin x = 1.4444 \Rightarrow \sin x = 0.7222$

$\Rightarrow x \approx 46.24°$

23) $110 = \frac{(40)^2\sin(2\theta)}{9.8}$

$\Rightarrow \sin(2\theta) \approx 0.674$

$\Rightarrow \sin(x) \approx 0.674$

$\Rightarrow x \approx 42.38°$ or $x \approx 137.62°$

$\Rightarrow \theta \approx 21.19°$ or $\theta \approx 68.81°$

يصل المقذوف أبعد نقطة عندما $\theta = 45°$ ، عندئذٍ:

$$d = \frac{(40)^2\sin(90°)}{9.8} = \frac{1600 \times 1}{9.8} \approx 163.27 \text{ m}$$

24) أخطأ علي عندما اختصر $\sin x$ من طرفي المعادلة الأصلية، أمّا سعيد فإجابته صحيحة.

25) $2\sin x\cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$

$\sin x\,(2\cos x + 1) + 2\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\sin x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 120°$, $x = 240°$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 270°$

26) $\cos x - \sin x = 1$

$\cos x = 1$, $\sin x = 0$

$\Rightarrow x = 0°$, $x = 360°$

$\cos x = 0$, $\sin x = -1$

$\Rightarrow x = 270°$

إذن: يوجد ثلاثة حلول للمعادلة.

اختبار نهاية الوحدة:

6) $\sin x = 0.8$, $\cos x = 0.6$, $\tan x = \frac{4}{3}$

7) $\sin x = \frac{-12}{13}$, $\cos x = \frac{5}{13}$, $\tan x = \frac{-12}{13}$

8) $\sin x = 0$, $\cos x = -1$, $\tan x = 0$

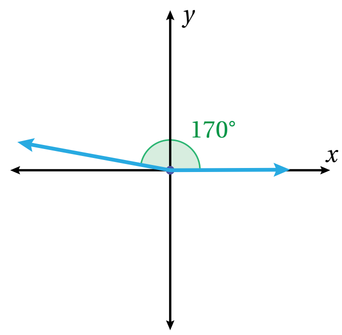
9) $\sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\tan x = 1$

10) $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, $\tan x = u.d.$ غير معرّف

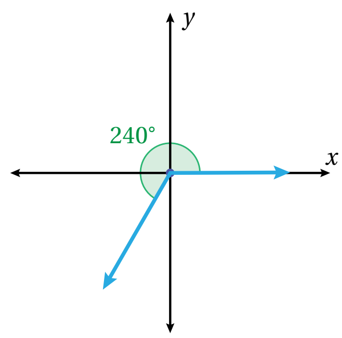
11) $\sin x = 0.28$, $\cos x = -0.96$, $\tan x \approx -0.29$

إجابات كتاب التمارين – الدرس 1:

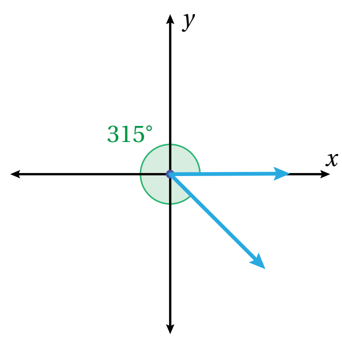
1)



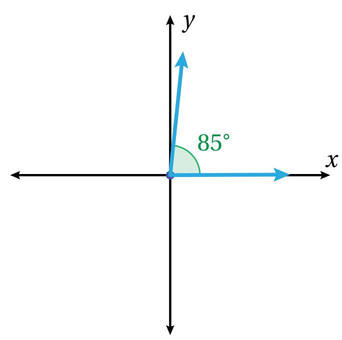
2)



3)



4)



9) $\sin x = -1, \cos x = 0 , \tan x\ u.d$

10) $\sin x = 0, \cos x = 1 , \tan x = 0$

11) $\sin x = \frac{-15}{17} , \cos x = \frac{8}{17} , \tan x = \frac{-15}{8}$

12) $\sin x = \frac{-11}{61} , \cos x = \frac{-60}{61} , \tan x = \frac{11}{60}$

17) $\sin \theta = \frac{\sqrt{143}}{12} , \tan \theta = -\sqrt{143}$

18) $\sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} , \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

19) $\cos \theta = -0.8 , \tan \theta = -0.75$

20) $\sin \theta \approx -0.89 , \tan \theta \approx -1.98$

21) $\theta = 135° , P(\frac{-1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}})$

22) $\theta = 270° , P(0 , -1)$

إجابات كتاب التمارين – الدرس 2:

23) $\theta \approx 48.59° , \theta \approx 131.41°$

24) $\theta \approx 49.46° , \theta \approx 310.54°$

25) $\theta = 135° , \theta = 315°$

26) $\theta \approx 240° , \theta \approx 300°$

27) $\theta \approx 54.29° , \theta \approx 125.71°$

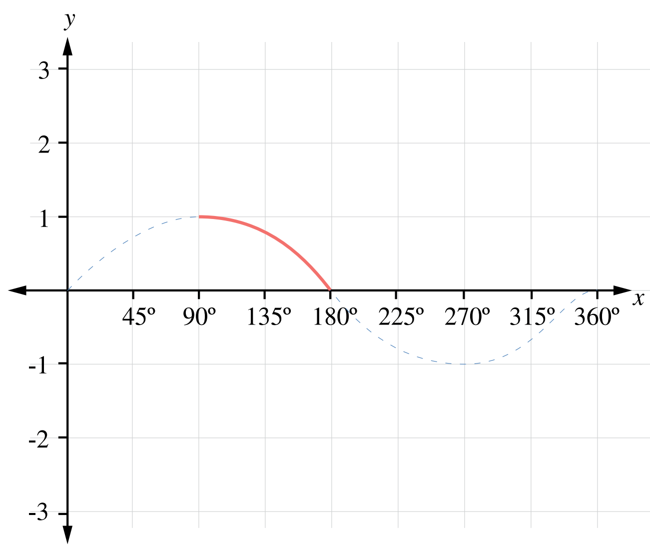
28) $\theta \approx 146.31° , \theta \approx 326.31°$

29) $\theta \approx 104.48° , \theta \approx 255.52°$

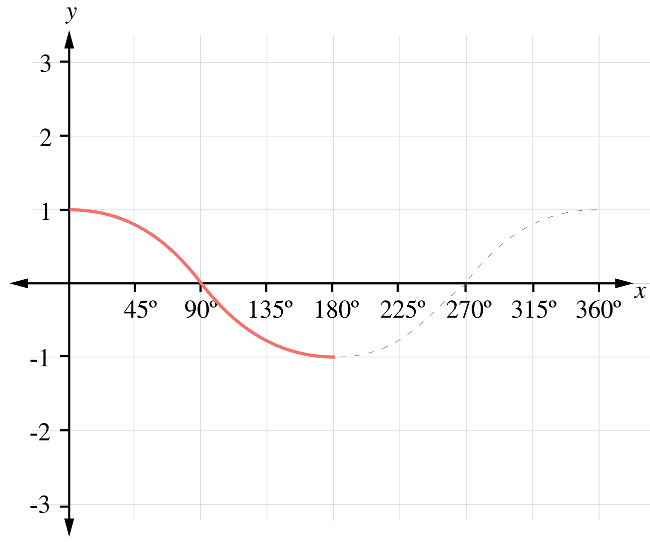
30) $\theta \approx 78.69° , \theta \approx 258.69°$

إجابات كتاب التمارين – الدرس 3:

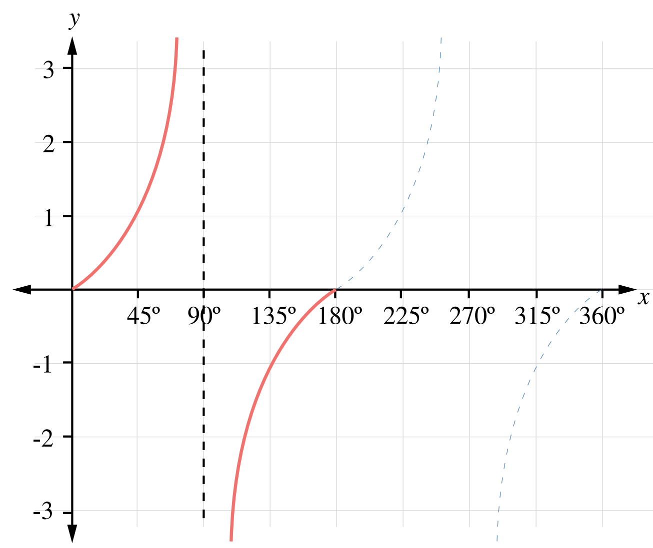
1)



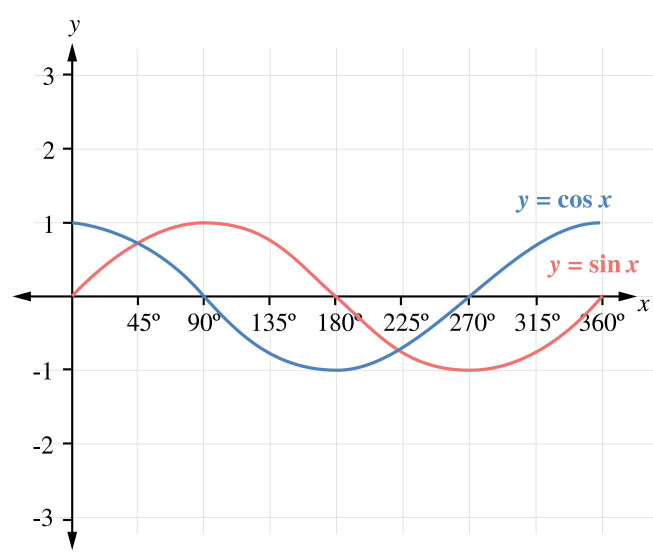
2)



3)



4)



- يبدأ منحنى $\sin x$ من (0,0) ، في حين يبدأ $\cos x$ من (0,1) .
- منحنى $\sin x$ يقطع المحور x عند: 0°، و180°، و360°
- منحنى $\cos x$ يقطع المحور x عند: 90°، و270°
- أكبر قيمة لكليهما 1، وأصغر قيمة لكليهما: −1

5) $a = 360°$
$b = 330°$
$c = 315°$
$d = 270°$

إجابات كتاب التمارين – الدرس 4:

1) $x \approx 19.47°, x \approx 160.53°$

2) $x = 60°, x = 240°$

3) $x \approx 125.26°, x \approx 234.74°$

4) $x = 120°, x = 240°$

5) $x = 150°, x = 330°$

6) $x = 270°$

7) $x = 45°, x = 315°$

8) $x = 120°, x = 300°$

9) $x = 45°, x = 225°$

10) $x = 90°$

11) ϕ

12) $x = 0°$

13) $x = 60°$

14) $x = 11.25°, x = 56.25°$

15) $x = 0°, x = 180°, x \approx 138.59°, x \approx 221.41°$

16) $x = 90°, x = 270°, x = 30°, x = 150°$

17) $x = 30°, x = 150°, x = 210°, x = 330°$

18) $x \approx 71.57°, x \approx 251.57°, x \approx 108.43°, x \approx 288.43°$

19) $x = 0°, x = 360°, x = 60°, x = 300°$

20) $x = 270°, x \approx 221.81°, x \approx 318.19°$

21) $\theta \approx 71.57°, \theta \approx 251.57°, \theta \approx 153.43°, \theta \approx 333.43°$

22) $x \approx 19.47°, x \approx 160.53°$

23) $x \approx 70.53°, x \approx 289.47°, x \approx 48.19°, x \approx 311.81°$

24) $\theta \approx 63.43°, \theta \approx 243.43°, \theta \approx 260.54°, \theta \approx 279.46°$

25) $y^2 = 5^2 - 1.5^2 = 22.75 \Rightarrow y \approx 4.77 \text{ m}$

$$\sin\theta = \frac{4.77}{5} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{4.77}{5}\right) \Rightarrow \theta \approx 72.55°$$

26) $$\tan\theta = \frac{12-1.75}{30} = \frac{10.25}{30}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{10.25}{30} \Rightarrow \theta \approx 18.86°$$

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة	• يتعرف الوحدة وأهدافها. • يحل أسئلة لها تعلُّق بأهم المعارف والمهارات السابقة للوحدة: المثلث قائم الزاوية، علاقات الزوايا.			1
الدرس 1: الاتجاه من الشمال.	• يستعمل الاتجاه من الشمال لتحديد الاتجاه. • يجد اتجاه نقطة من نقطة معينة. • يجد الاتجاه المعاكس. • يحل مسائل عن الاتجاه من الشمال.	الاتجاه من الشمال.	• المسطرة. • المنقلة. • جهاز الحاسوب. جهاز عرض البيانات. • ورقتا العمل: 1، و2	2
الدرس 2: قانون الجيوب.	• يستنتج قانون الجيوب. • يحل المثلث إذا علم منه طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما. • يحل المثلث إذا علم منه طول ضلع وقياس زاويتين. • يحل مسائل حياتية باستعمال قانون الجيوب.	قانون الجيوب. حل المثلث. زاوية الارتفاع. زاوية الانخفاض.	• جهاز الحاسوب. جهاز عرض البيانات. • الآلة الحاسبة. • أوراق، أو ألواح صغيرة.	3
الدرس 3: قانون جيوب التمام.	• يستنتج قانون جيوب التمام. • يحل المثلث إذا علم منه طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما. • يحل مثلثًا عُلِمت أطوال جميع أضلاعه. • يحل مسائل حياتية باستعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام.	قانون جيوب التمام.	• جهاز الحاسوب. جهاز عرض البيانات. • الآلة الحاسبة. • صندوق يحوي مجموعة بطاقات رُسِم عليها مثلثات مختلفة.	3
الدرس 4: استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.	يجد مساحة مثلث عُلِم منه: • طولا ضلعين، وقياس زاوية محصورة بينهما. • أطوال أضلاعه الثلاثة. • طول ضلع، وزاويتان. • طولا ضلعين، وزاوية تقابل أحدهما.		• جهاز الحاسوب. لوحة رُسِم عليها المثلثات المبينة في بند (التهيئة). • جهاز عرض البيانات. • الآلة الحاسبة.	2
الدرس 5: حل مسائل ثلاثية الأبعاد.	• يستعمل النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال مجهولة في مسائل ثلاثية الأبعاد. • يحسب الزاوية بين مستقيم ومستوى. • يحل مسائل حياتية ثلاثية الأبعاد.		• جهاز الحاسوب. جهاز عرض البيانات. • نماذج مجسمات متنوعة. • الآلة الحاسبة.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.	2
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				18

الوحدةُ 4

نظرة عامة على الوحدة:

درس الطلبة سابقًا النسب المثلثية، والدوال المثلثية، وحل المثلث قائم الزاوية، واستعملوها لحل مسائل حياتية ثنائية الأبعاد، وسوف يبنون على ذلك في هذه الوحدة لتعلم حل المثلث غير قائم الزاوية باستعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام، وحل مسائل حياتية ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد، وإيجاد مساحة المثلث الذي عُلِم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، وتفسير الاتجاه من الشمال، وإيجاده.

الوحدةُ 4

تطبيقاتُ المثلثاتِ
Triangle Applications

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

للنسبِ المثلثيةِ استعمالاتٌ كثيرةٌ في العلومِ، والهندسةِ، والإلكترونياتِ، مثلُ حسابِ ارتفاعاتِ قممِ الجبالِ والمباني، وتحديدِ اتجاهاتِ تحليقِ الطائراتِ على الخريطةِ وغيرِها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ (الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ) في الأرباعِ الأربعةِ.
- ✓ استخدامَ العلاقةِ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ نمذجةَ مسائلَ حياتيةٍ باستعمالِ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ، تتضمَّنُ قياساتِ الزوايا والأطوالِ لأضلاعٍ مجهولةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◀ تفسيرَ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادَهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ مُعيَّنةٍ.
- ◀ حَلَّ المثلثِ باستخدامِ قانونَي الجيوبِ، وجيوبِ التمامِ.
- ◀ استعمالَ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ.
- ◀ إيجادَ أطوالٍ وزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ.

110

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا الحادة.
- إيجاد قياس زاوية في مثلث قائم الزاوية إذا عُلِمت إحدى النسب الأساسية للزاوية وضلع من أضلاع المثلث.
- توظيف النسب المثلثية الأساسية في حل مثلث قائم الزاوية ضمن مواقف رياضية وحياتية متنوعة.
- استنتاج المتطابقة المثلثية الأساسية $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، واستعمالها لإيجاد النسب المثلثية الأساسية.

الصف العاشر

- تفسير الاتجاه من الشمال.
- إيجاد اتجاه نقطة ما بالنسبة إلى نقطة معينة.
- تعرف قانوني الجيوب، وجيوب التمام.
- حل مسائل رياضية وحياتية باستعمال قانوني الجيوب، وجيوب التمام.
- حل المثلث باستعمال قانوني الجيوب، وجيوب التمام.
- نمذجة مواقف حياتية باستعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام لإيجاد قياسات لزوايا وأضلاع مجهولة.
- استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- إيجاد أطوال وزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- نمذجة مواقف حياتية على:
  - قياسي الزاوية: الدائري، والستيني.
  - الاقترانات: القاطع $\sec x$، وقاطع التمام $\operatorname{cosec} x$، وظل التمام $\cot x$.
  - تمثيل الاقترانات (القاطع $\sec x$، وقاطع التمام $\operatorname{cosec} x$، وظل التمام $\cot x$) في المستوى الإحداثي.
- توظيف الاقترانات الدائرية في نمذجة ظواهر تحدث دوريًّا بسعة وتردد محددين.

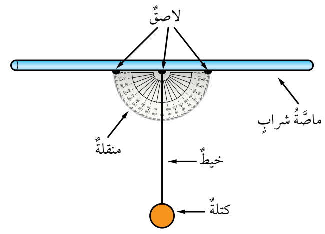
مشروعُ الوحدةِ

صنعُ كلينومترٍ واستعمالُهُ

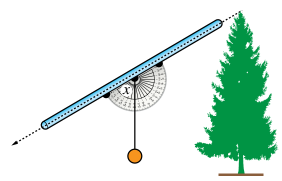
فكرةُ المشروعِ صنعُ جهازٍ بسيطٍ لإيجادِ قياساتِ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ، ثمَّ استعمالُهُ.

الموادُّ والأدواتُ ماصَّةُ شرابٍ، منقلةٌ، خيطٌ، كتلةٌ (مفتاحٌ، أوْ ممحاةٌ)، لاصقٌ شفّافٌ، شريطُ قياسٍ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

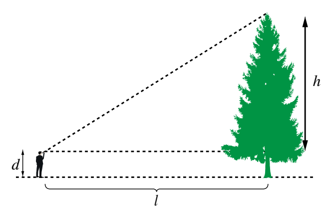


1 **صنعُ الكلينومترِ:** أُثبِّتُ ماصَّةَ الشـرابِ على الحافةِ المستقيمةِ للمنقلةِ باسـتعمالِ لاصقٍ شـفّافٍ، ثمَّ أُثبِّتُ طرفَ الخيطِ فـي مركزِ المنقلةِ، وأربطُ بطرفِهِ الآخرِ كتلةً صغيرةً، مثلَ: المفتاحِ، أوِ المشابكِ المعدنيةِ؛ على أنْ تتدلّى رأسيًّا إلى أسفلَ مثلِ خطِّ الشاقولِ.



2 **اسـتعمالُ الكلينومترِ:** أستعملُ أنا وأفرادُ مجموعتي الكلينومترَ لإيجادِ ارتفاعِ بنايةٍ أوْ شجرةٍ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- أختارُ شيئًا لأقيسَ ارتفاعَهُ، وليكنْ شجرةً.
- أقفُ على مسافةٍ منْ قاعدةِ الشجرةِ، مُمسِكًا بماصَّةِ الشرابِ.
- أنظرُ منْ فتحةِ ماصَّةِ الشرابِ إلى قمَّةِ الشجرةِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلي أنْ يقرأَ الزاويةَ x التي يشيرُ إليْها الخيطُ، مُلاحِظًا أنَّ هذهِ الزاويةَ تقعُ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الرأسـيِّ. وبذلكَ، تكـونُ زاويةُ ارتفاعِ قمَّةِ الشجرةِ: $(90^\circ - x)$.



- أقيسُ المسافةَ بينَ المكانِ الذي أقفُ عندَهُ وقاعدةِ الشجرةِ.
- أسـتعملُ القياساتِ التي دوَّنْتُها لإيجادِ ارتفاعِ الشجرةِ فوقَ مستوى عيني، باستعمالِ العلاقةِ الآتيةِ:

$$tan\ (90^\circ - x) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\ tan\ (90^\circ - x)$$

- أُضيفُ المسافةَ بينَ الأرضِ ومستوى عيني إلى القيمةِ التي توصَّلْتُ إليْها لإيجادِ ارتفاعِ الشجرةِ فوقَ سطحِ الأرضِ.

عرضُ النتائجِ:

أكتبُ معَ أفرادِ مجموعتي تقريرًا يتضمَّنُ ما يأتي:

- صورةٌ لجهازِ الكلينومترِ المصنوعِ.
- صورٌ لجميعِ الأشياءِ التي قيسَتْ ارتفاعاتُها، وتدوينُ الحساباتِ التي تمَّتْ في أثناءِ القياسِ بجانبِ كلٍّ منْها.

111

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	إعداد أداة القياس بصورة صحيحة.			
2	استعمال قياسات وحسابات صحيحة.			
3	التحقُّق مـن صحة النمـوذج والصور والرسـومات التوضيحية، ودقة الحسابات الخاصة بها واكتمالها.			
4	مشاركة أفراد المجموعة جميعًا بفاعلية في المشروع.			
5	التقرير المكتوب كامل ومنظم.			
6	اتصاف الشرح الشـفوي لأفراد المجموعة بالوضوح والفهم والإقناع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: صنع كلينومتر واستعماله.

هدف المشـروع: يهدف مشـروع الوحـدة إلى نمذجة مواقـف حياتية علـى المثلثات، والتوسـع في معرفـة الطلبة لاستعمالات النسب المثلثية، وتوظيفها في إيجاد قياسات زوايا الارتفاع والانخفاض باستعمال أدوات بسيطة من بيئتهم.

خطوات تنفيذ المشروع

- عـرِّف الطلبة بالمشـروع وأهميته في تعلـم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبـة إلـى مجموعـات (ثلاثيـة، أو رباعية) غير متجانسـة، ثـم اطلب إليهـم أن يوزعـوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لكل مجموعة.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد مشـروع المجموعة، وكتابة تقرير مفصل عن عملهم، وكيف اسـتعمل كل فرد في المجموعة الأداة التي صنعوها لقياس ارتفاع جسم ما، وبيان الحسابات الوافية.
- وجِّه أفراد المجموعات إلى قياس أشياء عِدَّة، مثل: ارتفاع شجرة، وارتفاع مئذنة، وارتفاع منزل، وارتفاع سارية العلم في ساحة المدرسة.
- بيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشـروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشـروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

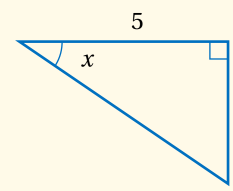
عرض النتائج

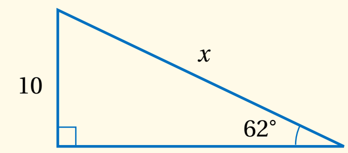
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة اسـتعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشـروع، وإعداد عـرض تقديمي، يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- اطلـب إلى أفراد كل مجموعة المشـاركة في عرض جزء من نتائج المشـروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهـارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهـم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- وضِّح للطلبة أهمية اشـتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليهـا، والمعلومات الجديدة التـي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشـروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

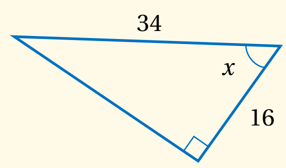
التقويم القبلي (التشخيصي):

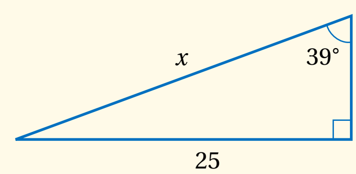
- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين لتساعد طلبتك على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة في عمود (أختبر معلوماتي)، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له في عمود (مراجعة سريعة).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

» **جد قيمة x في كلٍّ من المثلثات الآتية:**

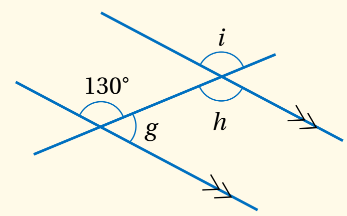
1) 

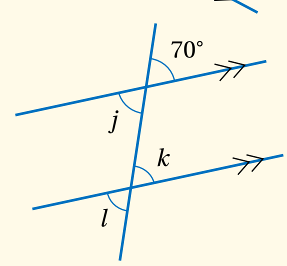
2) 

3) 

4) 

» **جد قياسات الزوايا المشار إليها بأحرف في ما يأتي:**

5) 

6) 

7) يقف سهيل على بُعْد 15 m من قاعدة شجرة، فوجد أن زاوية ارتفاع قمة الشجرة فوق مستوى عينيه 25°. إذا كان ارتفاع عيني سهيل عن الأرض 1.7 m، فما ارتفاع الشجرة؟

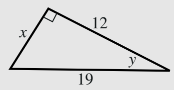
أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

الوحدةُ 4: تطبيقاتُ المثلثاتِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

مراجعةٌ

أَجِدُ قياساتِ الزوايا وطولَ الضلعِ المجهولِ في المثلثِ الآتي:

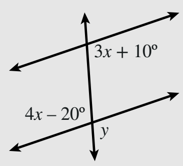


نظريةُ فيثاغورس	$x^2 = 19^2 - 12^2$
بالتبسيطِ	$= 361 - 144 = 217$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$x = \sqrt{217} \approx 14.7$
تعريفُ جيبِ التمامِ	$\cos y = \frac{12}{19}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$y = \cos^{-1}(\frac{12}{19}) \approx 51^\circ$

قياسُ الزاويةِ الثالثةِ في هذا المثلثِ:

$180^\circ - 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$

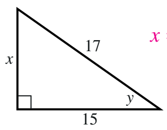
أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ x وَ y في الشكلِ الآتي:



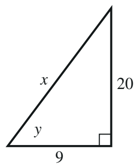
زاويتانِ متبادلتانِ داخليتانِ	$4x - 20^\circ = 3x + 10^\circ$
بإضافةِ $20^\circ - 3x$ إلى الطرفيْنِ	$x = 30^\circ$
زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ	$y = 4x - 20^\circ$
بالتعويضِ	$= 4(30^\circ) - 20^\circ$
بالتبسيطِ	$= 120^\circ - 20^\circ = 100^\circ$

أختبرُ معلوماتي

أَجِدُ قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ المجهولةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

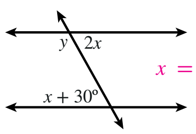
1) 

$x = 8$, $y \approx 28.1^\circ$

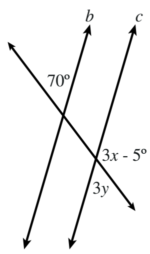
2) 

$x \approx 21.9$, $y \approx 56.8^\circ$

أَجِدُ قيمةَ x و y في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي:

3) 

$x = 30^\circ, y = 120^\circ$

4) 

$x \approx 38.3^\circ, y \approx 23.3^\circ$

22

إجابات المسائل الإضافية:

1) 67.4°
2) 11.3
3) 61.9°
4) 39.7
5) $g = 50^\circ,\ i = h = 130^\circ$
6) $j = k = l = 70^\circ$
7) 8.69 m

الاتجاهُ منَ الشمالِ
Bearing

فكرةُ الدرسِ تفســيرُ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادُهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ أُخرى بالرسمِ، والقياسِ، والحسابِ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

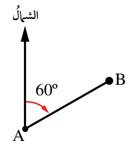
المصطلحاتُ الاتجاهُ منَ الشمالِ.

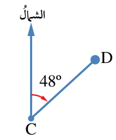
مسألةُ اليومِ حلَّقَتْ طائرةٌ منْ عمّانَ إلى العقبةِ، وقدْ صنعَ مســارُها المستقيمُ زاويةً قياسُها 200° معَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ. ما قياسُ الزاويةِ بينَ مسارِ عودةِ الطائرةِ إلى عمّانَ وخطِّ الشمالِ الجغرافيِّ؟

الاتجاهُ منَ الشمالِ (bearing) للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوُ قياسُ الزاويةِ التي ضلعُ ابتدائِها خطُّ الشــمالِ الجغرافيِّ المرسومِ منَ النقطةِ A، وضلعُ انتهائِها المســتقيمُ AB، وذلكَ عندَ قياسِ الزاويةِ في اتجاهِ حركةِ عقاربِ الســاعةِ. يُكتَبُ الاتجاهُ منَ الشــمالِ باستعمالِ عددٍ منْ ثلاثةِ أرقامٍ (منازلُ) بينَ 000° وَ 360°.

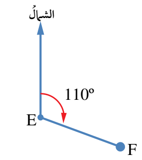
يُستخدَمُ الاتجاهُ منَ الشمالِ كثيـرًا فـي تحديـدِ خطوطِ الملاحةِ البحريةِ والجويةِ.

يُبيِّنُ الشــكلُ المجاورُ أنَّ الاتجاهَ منَ الشمالِ للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوَ 060°.

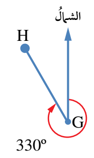




الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ D منَ النقطةِ C هوَ 048°.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ F منَ النقطةِ E هوَ 110°.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ H منَ النقطةِ G هوَ 330°.

112

إرشادات للمعلم

المجــال العاطفــي لا يقل أهمية عــن المجال المعرفــي؛ فلا تقل لأحــد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل لــه: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

الدرس 1

نتاجات الدرس

- يتعرف الاتجاه من الشمال.
- يستعمل الاتجاه من الشمال لتحديد الاتجاه.
- يجد اتجاه نقطة من نقطة معينة.
- يجد الاتجاه المعاكس.
- يحل مسائل عن الاتجاه من الشمال.

المواد والأدوات:

ورقتا العمل: 1، و2

التعلم القبلي:

- استعمال المنقلة لقياس الزوايا ورسمها.
- العلاقــات بين الزوايا الناتجة من تقاطع مســتقيم مع مستقيمين متوازيين.
- مجموع قياسات الزوايا حول نقطة.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بكيفية رســم الزوايا، وإيجاد قياساتها، ثم اطلب إليهم رسم الزاويتين: 120°، و255°، ثم إيجاد قياس الزاوية الثانيــة التي تكمل الدورة في الحالتين. 240°، و 105°
- ارسم مستقيمين متوازيين وقاطعًا لهما، ثم اطلب إلى الطلبة تسمية أزواج الزوايا الخاصة الناتجة والعلاقات بين قياساتها. بعد ذلك اكتب قياس إحدى الزوايا، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد قياســات الزوايا الباقية كلها. أزواج الزوايا الخاصة الناتجة: المتناظرة، والمتبادلة، والمتحالفة.

2 الاستكشاف

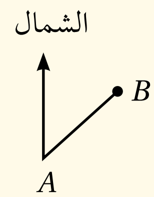
- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » أين تقع مدينة العقبة بالنسبة إلى العاصمة عمّان؟ غرب الجنوب من عمّان.
  » كيف يمكن إيجاد الزاوية بين اتجاه الجنوب واتجاه العقبة؟ بطرح °180 من °200
  » ما قياس الزاوية بين خط الشمال المار بمدينة العقبة والخط الواصل من العقبة إلى عمان؟ °20
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

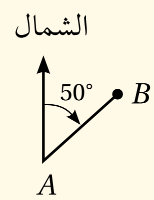
كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الزاوية angle، والمستقيم line، والاتجاه من الشمال bearing.

3 التدريس

1



2



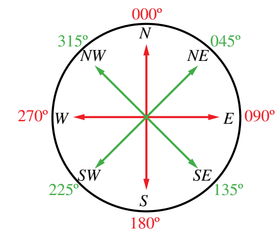
- ارسم على اللوح الشكل 1 (القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تصنع زاوية قياسها °50 مع خط الشمال)، ثم أخبر الطلبة أن النقطتين A وB تمثلان مدينتين على خريطة، وأن المطلوب معرفة اتجاه B من A، وأن أفضل طريقة لذلك تمثيل الاتجاه بصورة زاوية تسمى الاتجاه من الشمال، وإيجاد قياسها مع حركة عقارب الساعة من خط الشمال، والإشارة إلى الشمال اختصارًا بالحرف N، مُبيِّنًا أنه يمكن التعبير عن الاتجاه بعدد من 3 أرقام؛ فإذا كان للزاوية رقمان كُتِب 0 على يسارها ليصبح لها 3 أرقام، مثل: °060، و°123، و °075
- اطلب إلى أحد الطلبة قياس هذه الزاوية، ثم كتابة القياس كما في الشكل 2، مُبيِّنًا أن اتجاه B من A هو °050
- وجِّه الطلبة إلى دراسة الأشكال في الصفحة 112، وملاحظة وجود أوضاع مختلفة للاتجاه من الشمال.
- وضِّح للطلبة الاتجاهات الثمانية الأساسية، ثم ارسم خطوطًا أخرى من مركز البوصلة، واطلب إلى بعض الطلبة تقدير الاتجاهات التي رسمتها.
- ارسم على اللوح أيَّ نقطتين (C, D مثلًا)، ثم اسأل الطلبة:
  » كيف يمكن إيجاد اتجاه النقطة D من النقطة C؟
- اختر طالبًا لإجابة السؤال على اللوح، ثم اسأل الطلبة:
  » مَنْ يُؤيِّد هذه الإجابة؟
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أعطِ كل مجموعة نسخة من ورقة العمل 1
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

ملاحظات المعلم

اعتمـدَ الإنسـانُ قديمًا على الشمسِ والقمرِ والنجومِ في معرفةِ الاتجاهـاتِ، ثمَّ أخذَ يعتمـدُ اليومَ علـى البوصلةِ التـي تُحدِّدُ اتجاهَ الشـمالِ، ومنْهُ تُحدَّدُ بقيةُ الاتجاهاتِ.

توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ رئيسةٍ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

1. الشمالُ (N)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (000°).
2. الشرقُ (E)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (090°).
3. الجنوبُ (S)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (180°).
4. الغربُ (W)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (270°).



توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ أُخرى مشهورةٍ بدءًا منَ الشمالِ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

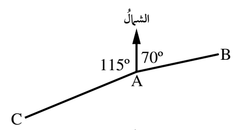
1. الشمالُ الشرقيُّ (NE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (045°).
2. الجنوبُ الشرقيُّ (SE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (135°).
3. الجنوبُ الغربيُّ (SW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (225°).
4. الشمالُ الغربيُّ (NW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (315°).

أتعلَّمُ

سنسـتعملُ في بقيةِ الدرسِ كلمـةَ (اتجـاه) وحدَهـا للدلالـةِ على الاتجـاهِ منَ الشمالِ.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ مدنٍ، هيَ: A، وَB، وَC. أكتبُ اتجاهَ المدينةِ B منَ المدينةِ A واتجاهَ المدينةِ C منَ المدينةِ A.

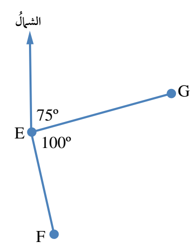


مقياسُ الرسمِ: كلُّ 1 cm يُمثِّلُ 10 km

اتجاهُ المدينةِ B منَ المدينةِ A هوَ 070°، واتجاهُ المدينةِ C منَ المدينةِ A هوَ $360° - 115° = 245°$

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ سفنٍ، هيَ: E، وَF، وَG. أكتبُ اتجاهَ السفينةِ G منَ السفينةِ E، واتجاهَ السفينةِ F منَ السفينةِ E. انظر الهامش.



مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيف يُكتَب الاتجاه من شكل عُلِمت قياسات بعض زواياه.

أخطاء مفاهيمية:

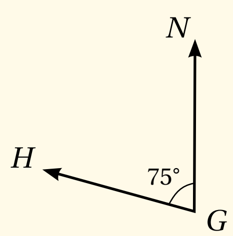
- قد يعتقد بعض الطلبة أن اتجاه المدينة C من المدينة A هو 115°؛ لذا ذكِّرهم أن الاتجاه يقاس بدءًا من خط الشمال مع حركة عقارب الساعة، ثم ارسم قوسًا يدل على الزاوية التي يجب إيجاد قياسها.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- اكتب اتجاه النقطة H من النقطة G في الشكل المجاور. 285°



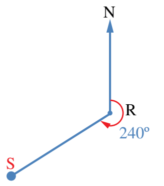
إجابة أتحقق من فهمي 1:

اتجاه G من E هو 075°، واتجاه F من E هو 175°

إذا عُلِمَ اتجاهُ النقطةِ S منَ النقطةِ R، فيُمكِنُ حسابُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S .

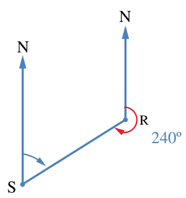
مثال 2

أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ R منَ النقطةِ S في الشكلِ المجاورِ.



الطريقةُ الأولى: استعمالُ الرسمِ.

أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيِّ عندَ النقطةِ S، ثمَّ أستعملُ منقلةً لأقيسَ الزاويةَ التي رأسُها S، وضلعاها خطُّ الشمالِ (SN) والمستقيمُ SR.



سأجدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوَ $60°$، إذنْ، اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ S هوَ $060°$.

الطريقةُ الثانيةُ: استعمالُ الجبرِ.

يُمكِنُ إيجادُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

$m\angle NRS = 360° - 240° = 120°$ مجموعُ قياسِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$

$m\angle NSR = 180° - 120° = 60°$ خطّا الشمالِ متوازيانِ؛ لذا، فالزاويتانِ الداخليتانِ NRS، وَ NSR متكاملتانِ

مريمُ الجيليُّ المعروفةُ بمريمَ الأسطرلابيةِ هيَ عالِمةُ رياضياتٍ وفَلَكٍ مُسْلِمةٌ، اخترعَتِ الأسطرلابَ المُعقَّدَ؛ وهوَ آلةٌ فلكيةٌ مُهِمَّةٌ بُنِيَتْ عليْها آليةُ عملِ أنظمةِ الملاحةِ الحديثةِ (GPS).

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X منَ النقطةِ Z هوَ $295°$، فما اتجاهُ النقطةِ Z منَ النقطةِ X؟ $115°$

114

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 الذي يبين كيفية إيجاد الاتجاه المعاكس، مُوضِّحًا لهم أنه توجد طريقتان لذلك، هما: استعمال الرسم، واستعمال الجبر.

مثال إضافي

- إذا كان اتجاه المدينة A من المدينة B هو $150°$، فما اتجاه المدينة B من المدينة A؟ $330°$

مثال 3: من الحياة

تُعَدُّ مدينةُ القدسِ واحدةً منْ أقدمِ مدنِ العالَمِ؛ فتاريخُها يرجعُ إلى أكثرَ منْ خمسةِ آلافِ سنةٍ. وللقدسِ أسماءٌ عديدةٌ، منْها: بيتُ المقدسِ، وأُولى القِبلتيْنِ، والقدسُ الشريفُ.

أَستعملُ الخريطةَ المجاورةَ لتحديدِ اتجاهِ العاصمةِ عمّانَ منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

الخطوةُ 1: أرسمُ قطعةً مستقيمةً بينَ مدينتَيِ القدسِ الشريفِ وعمّانَ.

الخطوةُ 2: أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيَّ عندَ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

الخطوةُ 3: أَستعملُ المنقلةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ بينَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ والقطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ المدينتيْنِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. سأَجِدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوَ 78°

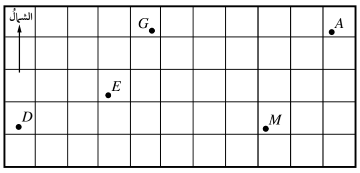
إذنْ، اتجاهُ العاصمةِ عمّانَ منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ هوَ 078°.

أتحقق من فهمي

أستعملُ الخريطةَ في المثالِ السابقِ لتحديدِ اتجاهِ مدينةِ حيفا منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ. 350°

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ كلًّا منَ الاتجاهاتِ الآتيةِ باستعمالِ المنقلةِ:



1. اتجاهُ النقطةِ D منَ النقطةِ E. 250°
2. اتجاهُ النقطةِ G منَ النقطةِ A. 270°
3. اتجاهُ النقطةُ M منَ النقطةِ D. 091°

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبين كيفية إيجاد الاتجاه في موقف حياتي.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أعطِ كل مجموعة نسخة من ورقة العمل 2
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- حدِّد وقتًا لإنجاز المهام، مُنبِّهًا أفراد المجموعات إلى انتهاء الوقت باستعمال استراتيجية (إشارة الصمت)، ثم اطلب إلى كل مجموعة عرض إجابتها أمام المجموعات الأخرى.

! أخطاء مفاهيمية:

- قد لا يُميِّز بعض الطلبة النقطة الأساسية التي يُحدَّد منها اتجاه النقطة الأخرى؛ لذا ذكِّرهم بما يأتي:
  - » تحديد الاتجاه بدءًا من النقطة التي تتبع كلمة (من) في السؤال، وبدء عملية القياس دائمًا من الشمال.
  - » البدء أولًا بإضافة خط الشمال المار بالنقطة التي يُحدَّد منها الاتجاه.
  - » شجِّع الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط على وضع دائرة في السؤال حول النقطة التي يُحدَّد منها الاتجاه.

إرشاد:

عندما يُحدِّد الطلبة النقطة التي يقاس منها الاتجاه، ويرسموا خط الشمال المار بها، نبِّههم إلى ضرورة وضع مركز المنقلة على هذه النقطة، وووضع التدريج 0 على خط الشمال الذي هو ضلع ابتداء الزاوية، ثم اعتماد اتجاه حركة عقارب الساعة لقراءة قياس الزاوية التي يشير إليها الخط المار بالنقطة الأساسية والنقطة التي نريد تحديد اتجاهها.

تنويع التعليم:

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  - » إذا كان اتجاه B من A هو °060، فما اتجاه A من B؟ (°240)
- ارسم مخططًا يُمثِّل المسألة، ثم كرِّر السؤال مُغيِّرًا الاتجاهات، مثل:
  090° (270°), 160° (340°), 290°, (110°)
- اكتب النتائج في جدول، ثـم اعرضه أمام الطلبة (قد يُلاحِظ الطلبة من ذوي المســتوى فوق المتوسط أن الفرق بين كل اتجاهين °180).

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسـائل**)، ثم اطلـب إليهم حلها (يمكـن الطلب إليهم حـل الأسـئلة ذوات الأرقـام الزوجية ضمن مجموعات).
- إذا واجـه بعض الطلبــة صعوبة في حل أي مسـألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- نبِّه الطلبة عند حل السؤال 8 أن تحديد موقع النقطة B يتطلب توافر شرطين، هما: وقوعها شرقي النقطة A، ووقوعها على اتجاه °045 من النقطة C .

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلـب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية غير متجانسة، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السـؤال 21 إلى رسـم عمود من موقع السفينة إلى امتداد خط الشمال؛ لتكوين مثلثين قائمي الزاوية، ما يساعدهم على تطبيق نظرية فيثاغورس عند إيجاد طول SP، ثم اطلب إليهم استعمال النسب المثلثية لإيجاد اتجاه S من P.
- امنح أفراد المجموعات وقتًا للتفكير في حل السؤالين: 21، و22

أرسمُ شكلًا يُوضِّحُ كلَّ موقفٍ ممّا يأتي: 4–8 انظر ملحق الإجابات

4 اتجاهُ النقطةِ C منَ النقطةِ H هوَ °170.

5 اتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ W هوَ °310.

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

6 اتجاهُ A منْ B هوَ °070. أَجِدُ اتجاهَ B منْ A.

7 اتجاهُ X منْ Y هوَ °324. أَجِدُ اتجاهَ Y منْ X.

8 تقعُ النقطةُ A شماليَّ النقطةِ C، وتقعُ النقطةُ B شرقيَّ النقطةِ A، واتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ C هوَ °045. أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ الثلاثِ.

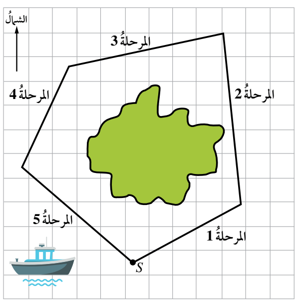
ملاحةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ حولَ الأضلاعِ الأربعةِ لمربَّعٍ مساحتُهُ كيلو مترٍ مربَّعٌ واحدٌ: 9–10 انظر ملحق الإجابات

9 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ الشـمالِ، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سـلكَها حتّى أكمـلَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

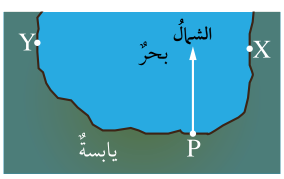
10 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ °090، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ بعكسِ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

11 **خرائـطُ:** تُبيِّنُ الخريطةُ الآتيةُ رحلةَ قاربٍ حولَ إحـدى الجُزرِ، بدأَتْ منَ الموقعِ S، وانتهَتْ عندَهُ. إذا كانَ كلُّ 1 cm على الخريطةِ يُمثِّلُ 20 km، فما طولُ كلِّ مرحلةٍ منْ مراحلِ الرحلةِ واتجاهُها؟ أنسخُ الجدولَ الآتيَ، ثمَّ أُكمِلُهُ:

المرحلةُ	المسافةُ الحقيقيةُ	الاتجاهُ
1	50 km	060°
2	70 km	355°
3	66 km	260°
4	46 km	204°
5	60 km	130°



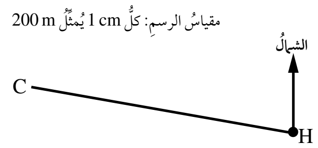
موانئُ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ الميناءَ P والمرفأيْنِ X وَ Y على الساحلِ:



12 أبحـرَ قاربُ صيدٍ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ X. ما اتجـاهُ المرفأِ X منَ الميناءِ P؟ 035°

13 أبحرَ يختٌ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ Y. ما اتجاهُ المرفأِ Y منَ الميناءِ P؟ 302°

مواقعُ جغرافيةٌ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ موقعَ بيتِ أريجَ عندَ النقطةِ H والناديَ الرياضيَّ الذي ترتادُهُ عندَ النقطةِ C:

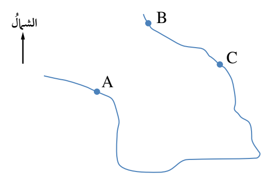


14 أستعملُ مقياسَ الرسمِ المعطى لإيجادِ المسافةِ الحقيقيةِ بينَ بيتِ أريجَ والنادي الرياضيِّ. 1100m

15 أستعملُ منقلةً لإيجادِ اتجاهِ النادي منْ بيتِ أريجَ. 280°

16 يبعدُ السوقُ التجاريُّ S مسافةَ 600 m عنْ بيتِ أريجَ، وباتجاهِ 150° منْ بيتِها. أُعيِّنُ موقعَ السوقِ التجاريِّ S على نسخةٍ منَ المُخطَّطِ. انظر ملحق الإجابات

17 ملاحةٌ جويةٌ: في أثناءِ تحليقِ طائرةٍ باتجاهِ 072°، طُلِبَ إلى قائدِها التوجُّهُ إلى مطارٍ صوبَ الجنوبِ. ما الزاويةُ التي سيستديرُ بها؟ 108°



18 خرائطُ: تُمثِّلُ A وَ B وَ C ثلاثَ قرًى تقعُ على رؤوسِ مربَّعٍ في خليجٍ ما. إذا كانَ اتجاهُ القريةِ B منَ القريةِ A هوَ 030°، فما اتجاهُ القريةِ A منَ القريةِ C؟ انظر ملحق الإجابات

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. 20°

مهارات التفكير العليا

20 مسألةٌ مفتوحةٌ: أرسمُ مثلثًا ذا قاعدةٍ أفقيةٍ أُسمّيهِ ABC، ثمَّ أقيسُ زواياهُ، ثمَّ أَجِدُ اتجاهَ A منْ B، واتجاهَ C منْ A، واتجاهَ C منْ B. انظر ملحق الإجابات

تحدٍّ: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P مسافةَ 57 km باتجاهِ الشمالِ، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ 045°، وقطعَتْ مسافةَ 38 km. إذا كانَ موقعُ السفينةِ الحاليُّ هوَ S، فأَجِدُ:

21 SP. انظر ملحق الإجابات

22 اتجاهَ موقعِ السفينةِ منَ الميناءِ P. انظر ملحق الإجابات

117

المفاهيم العابرة:

- بعد الانتهاء من حل المثال 2، عزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا الإنسانية (النوع الاجتماعي)، ودور المرأة في تطور العلم، ثم اطلب إليهم البحث في مصادر المعرفة المتوافرة عن عالِمات أسهمن في تطور العلوم، ثم كتابة تقرير عن ذلك، ثم قراءته في الإذاعة المدرسية، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.
- بعد الانتهاء من حل المثال 3، عزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا السياسية والوطنية (هوية القدس)، ودور المملكة الأردنية الهاشمية في الإشراف على المقدسات الإسلامية والمحافظة عليها، ثم اطلب إليهم كتابة فقرة من 60 كلمة تُبيِّن هذا الدور، ثم عرضها على معلِّم اللغة العربية.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 23 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث عن خريطة باستعمال شبكة الإنترنت، أو تطبيق الخرائط في الهواتف الذكية (Google Map)، أو مصادر المعرفة المتوافرة في المنزل أو مختبر الحاسوب، ثم تعيين موقعين عليها، وإيجاد اتجاه أحدهما من الآخر، مُوثِّقين الصورة باستعمال خاصية طباعة الشاشة، ثم عرضها مع الحل أمام المعلِّم، ثم الاحتفاظ بها في ملف الأعمال.

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى بدء تنفيذ الخطوة الأولى من المشروع، وصنع الكلينومتر وفق المواصفات المطلوبة، والتحقُّق من فاعلية الجهاز.
- ذكِّر الطلبة بضرورة تضمين المشروع صورًا للجهاز، ومراحل صنعه.

6 الختام

- اطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - » ما المقصود بالاتجاه من الشمال؟
  - » كيف يمكن إيجاد اتجاه النقطة A من النقطة B؟
- استمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم اسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.

الدرس 2

نتاجات الدرس

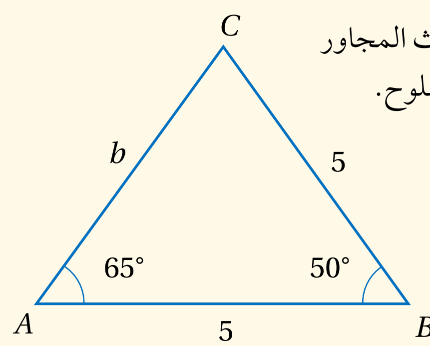
- يستنتج قانون الجيوب.
- يحــل مثلثًا عُلِم منه طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما.
- يحل مثلثًا عُلِم منه طول ضلع وقياس زاويتين.
- يحل مسائل حياتية باستعمال قانون الجيوب.

التعلم القبلي:

- إيجاد النسب المثلثية الأساســية للزوايا ضمن دورة واحدة.
- التطبيق على نظرية فيثاغورس.
- التطبيق على الاتجاه من الشمال.

1 التهيئة

- ارسم المثلث المجاور على يمين اللوح.



- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » كيف يمكن إيجاد طول الضلع b؟
  » هل يمكن اســتعمال نظرية فيثاغورس لإيجاده؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ المثلث ليس قائمًا.
  » ماذا يحدث إذا أسقطت عمودًا من الرأس C على AB؟
  » كيف يمكن إيجاد AC؟ بتطبيق نظرية فيثاغورس. $b \sin 50° = 5 \sin 65°$
- اســتمع لإجابات أكبر عــدد ممكن مــن الطلبة، ثم اسألهم:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » اذكر هذه الإجابة.

الدرس 2

قانونُ الجيوبِ
Law of Sines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ، عُلِمَ فيهِ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما، أوْ زاويتانِ وضلعٌ بينَهُما.

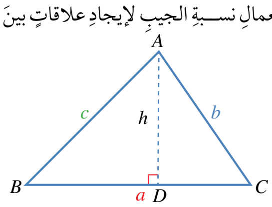
المصطلحاتُ حَلُّ المثلثِ، قانونُ الجيوبِ.

مسألةُ اليومِ إذا كانَــتْ جــرشُ والزرقاءُ ومأدبــا تُشــكِّلُ رؤوسَ مثلثٍ على الخريطةِ، والمســافةُ بينَ مدينتَي الزرقاءِ وجرشَ 44 km، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ جرشَ 52°، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِــها مدينةُ الزرقاءِ 93°، فهــلْ يُمكِنُ بهذهِ المعلوماتِ حسابُ المسافةِ بينَ مدينتَيْ جرشَ ومأدبا؟

يوجدُ في أيِّ مثلثٍ ســتةُ قياســاتٍ، هيَ: ثلاثةُ أضلاعٍ، وثلاثُ زوايا. وإيجادُ هذهِ القياساتِ يُعرَفُ باسمِ **حَلِّ المثلثِ** (solving a triangle)؛ إذْ تساعدُ قياساتُ الزوايا على حَلِّ المثلثاتِ في حالِ كانَتْ بعضُ قياســاتِها معروفةً، وذلكَ باســتعمالِ نســبةِ الجيبِ لإيجادِ علاقاتٍ بينَ أطوالِ الأضلاعِ.

رموزٌ رياضيةٌ
تشــيرُ الأحــرفُ الكبيــرةُ A, B, C إلــى رؤوسِ المثلــثِ وزوايــاهُ، فــي حينِ تشــيرُ الصغيــرةُ منْها a, b, c إلــى أطــوالِ الأضــلاعِ. فمثــلًا، طولُ الضلــعِ المقابــلِ للزاويةِ A يشــارُ إليْــهِ بالحرفِ a، وهكذا.

ففــي المثلــثِ ABC المرســومِ جانبًــا، يُمثِّلُ h الارتفــاعَ منَ النقطــةِ A؛ لذا فهوَ عمــوديٌّ على القاعدةِ $\overline{BC}$.



يُمكِنُ الاستفادةُ منْ تعريفِ الجيبِ في استنتاجِ بعضِ العلاقاتِ كما يأتي:

تعريفُ الجيبِ	$\sin B = \frac{h}{c}$
بالضربِ التبادليِّ	$h = c\sin B$
تعريفُ الجيبِ	$\sin C = \frac{h}{b}$
بالضربِ التبادليِّ	$h = b\sin C$
بالمساواةِ $h = h$	$c\sin B = b\sin C$
بقسمةِ الطرفيْنِ على $\sin B$، ثمَّ على $\sin C$	$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) ثم اسألهم:
  - » هل يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد المسافة بين مأدبا والزرقاء؟ لا؛ لأنَّ المثلث غير قائم الزاوية.
  - » كيف يمكن توظيف النسب المثلثية في إيجاد المسافة بين مأدبا والزرقاء؟
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المثلث triangle، وحل المثلث solving triangle، والزاوية angle، وقانون الجيوب Law of Sine.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة عناصر المثلث، ومفهوم حل المثلث، ثم اسألهم:
  - » كم عنصرًا يلزم معرفته لحل المثلث؟ لماذا؟
- استمع لإجابات الطلبة، مُذكِّرًا إيّاهم بحل المثلث قائم الزاوية.
- اشرح للطلبة كيفية اشتقاق قانون الجيوب الوارد بداية الدرس في كتاب الطالب.
- قد يكون اشتقاق القانون غير واضح للطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط؛ لذا وضِّحه لهم بالرجوع إلى الرسم الموجود على يمين اللوح (في بند التهيئة)، ثم اطلب إليهم كتابة النتيجة $b \sin 50° = 5 \sin 65°$ بالرموز بدلًا من الزوايا °50، °65، مُبيِّنًا لهم العلاقة: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.
- اكتب على اللوح قانون الجيوب، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما الحالات التي يمكن فيها استعمال قانون الجيوب؟
- استمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم اسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

مثال 1

- ناقِش الطلبة فــي حل المثال 1 اعتمادًا على الشــكل المرفــق، ودرِّبهــم على اختيــار العلاقة المناســبة بيــن عناصر المثلــث المعطاة لإيجاد طــول الضلع المطلوب.

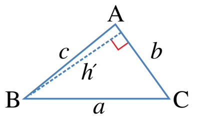
التقويم التكويني:

- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قــد يخطئ بعض الطلبــة في حل التدريــب في بند (أتحقق من فهمي)، فيســتعملون نظرية فيثاغورس؛ لذا ذكِّرهم أن المثلث ليس قائم الزاوية.

وبالمثلِ، يُمكِنُ استنتاجُ العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ عندَ رسمِ ارتفاعِ المثلثِ منَ النقطةِ B بشكلٍ عموديٍّ على AC، أوْ رسمِ ارتفاعِهِ منَ النقطةِ C عموديًّا على AB.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عندَ دمجِ هذهِ العلاقاتِ الثلاثِ معًا، ينتجُ **قانونُ الجيوبِ** (law of sines).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

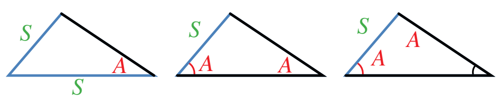
يُســتعمَلُ قانونُ الجيوبِ لحَلِّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ، وذلكَ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA).
2. ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما (SSA).

أفكِّرُ

لماذا يتعـذَّرُ حَلُّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ فقطْ قياساتُ زواياهُ جميعًا؟

يُبيِّنُ الشكلُ الآتي هاتيْنِ الحالتيْنِ:



الحالةُ 1 ASA الحالةُ 1 SAA الحالةُ 2 SSA

إرشادٌ

توجدُ صيغةٌ أخرى لقانونِ الجيوبِ هيَ:

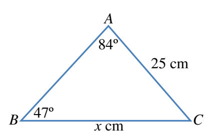
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

إرشادٌ

- الحــرفُ S هــوَ اختصارٌ لكلمــةِ Side، وتعنــي الضلعَ.
- الحــرفُ A هــوَ اختصارٌ لكلمــةِ Angle، وتعنــي الزاويةَ.

مثال 1

أجِدْ قيمةَ x في المثلثِ ABC.



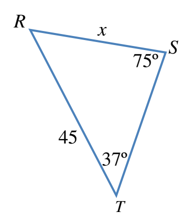
قانونُ الجيوبِ $\frac{x}{\sin 84^\circ} = \frac{25}{\sin 47^\circ}$

بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 84^\circ$ $x = \frac{25 \sin 84^\circ}{\sin 47^\circ}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\approx 34 \text{ cm}$

أتحقق من فهمي

أجِدْ قيمةَ x في المثلثِ RST المُبيَّنِ جانبًا.



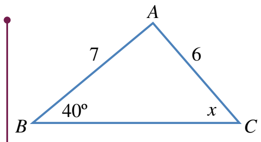
إجابة أتحقق من فهمي 1:

$x = 28.037$

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.



$\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40^\circ}{6}$ قانونُ الجيوبِ

$\sin x = \frac{7 \sin 40^\circ}{6}$ بضربِ الطرفَيْنِ في 7

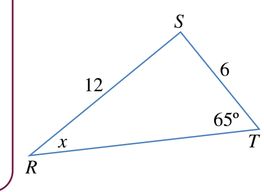
≈ 0.7499

$x = \sin^{-1}(0.7499)$ معكوسُ الجيبِ

$\approx 48.6^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

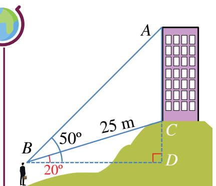
أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST.



يُمكِنُ نمذجةُ كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ باستعمالِ المثلثاتِ، ثمَّ إيجادُ قياساتٍ مجهولةٍ فيها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.

مثال 3: من الحياة

يقعُ برجٌ ارتفاعُهُ h مترٌ على تلَّةٍ، وقدْ رُصِدَتْ قمَّةُ البرجِ A منَ النقطةِ B التي تبعدُ عنْ قاعدةِ البرجِ 25 m فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها 50°، ثمَّ رُصِدَتْ قمَّةُ التلَّةِ منَ النقطةِ B نفسِها فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها 20°. ما ارتفاعُ البرجِ h؟



معلومةٌ أساسيةٌ

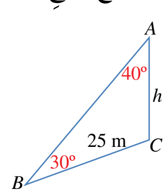
تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ والخطِّ الأفقيِّ المارِّ بعينِ الناظرِ زاويةَ الارتفاعِ.

أَجِدُ أولًا قياسَ الزاويةِ ABC:

$m\angle ABC = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$

ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAD:

$m\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$



ارتفاعُ البرجِ هوَ طولُ الضلعِ AC في المثلثِ BAC. أستعملُ قانونَ الجيوبِ لحَلِّ هذا المثلثِ.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

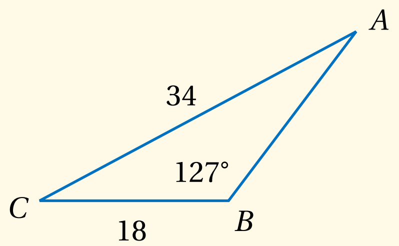
26.95

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 اعتمادًا على الشكل المرفق، ودرِّبهم على اختيار العلاقة المناسبة بين عناصر المثلث المعطاة لإيجاد قياس الزاوية المطلوبة.

مثال إضافي

- جد قياس الزاوية A. 26.3°



إرشادات:

- يستعمل الطلبة في المثال 2 معكوس الجيب؛ لذا وجِّههم إلى استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج، وذكِّرهم بطريقة استعمالها.
- ركِّز على تطوير مهارات الطلبة في استعمال الآلة الحاسبة في دروس هذه الوحدة؛ فذلك من المهارات الحياتية الأساسية. يمكن مساعدة الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط على إتقان هذه المهارة عن طريق العمل في مجموعات ثنائية مع زميل من ذوي المستوى المتوسط أو فوق المتوسط.
- أخبر الطلبة أن درس (معكوس الاقترانات المثلثية) سوف يرد في دروس الفصل الدراسي الثاني.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في أثناء الحل باستعمال الآلة الحاسبة؛ لذا درِّبهم على استعمالها جيدًا، وتوجيههم إلى الحل ضمن مجموعات.

مثال 3: من الحياة

- وضِّح للطلبة مفهوم زاويــة الارتفاع، ثم اطلب إليهم ذكر أمثلة من الحياة على ذلك.
- ناقِش الطلبــة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن اســتخدام قانون الجيوب في موقف حياتي.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

الارتفاع ≈ 22 تقريبًا.

إرشادات للمعلم

قد لا يتمكَّن الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط من فهم المســألة؛ لذا حاول تطبيــق الموقف عمليًّا لتسهيل عملية الفهم.

مثال 4: من الحياة

- ذكِّــر الطلبة بمفهــوم الاتجاه من الشــمال قبل البدء بشرح المثال 4
- ناقِش الطلبــة في حل المثال 4 الــذي يعرض تطبيقًا على قانون الجيوب والاتجاه من الشمال معًا، مستعينًا بالرسم المرفق.
- قد لا يتمكَّن الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط من فهم المســألة؛ لذا حاول تطبيــق الموقف عمليًّا لتسهيل عملية الفهم.

إرشــاد: قــد لا يتمكَّــن الطلبــة مــن ذوي المســتوى دون المتوســط مــن فهــم المثــال؛ لــذا اســرد لهــم قصــة تُوضِّحــه.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

97.8

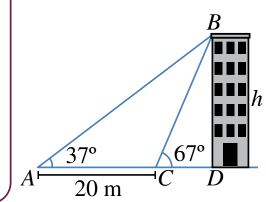
بعدَ ذلكَ أَستعملُ قانونَ الجيوبِ في المثلثِ BAC لإيجادِ ارتفاعِ البرجِ:

$\frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{25}{\sin 40^\circ}$ قانونُ الجيوبِ

$h = \frac{25 \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$ بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 30^\circ$

$h \approx 19.45\text{ m}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، ارتفاعُ البرجِ هوَ: 19.45 m

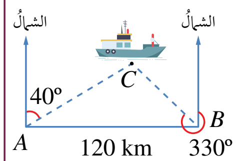


أتحقق من فهمي

رصدَ ليثٌ زاويةَ قمَّةِ بنايةٍ منَ النقطةِ A، فكانَتْ 37°، ثمَّ ســارَ مسافةَ 20 m باتجاهِ البنايةِ حتّى النقطةِ C، ثمَّ رصدَ زاويةَ قمَّةِ البنايةِ، فكانَتْ 67°. أَجِدُ ارتفاعَ البنايةِ.

مثال 4: من الحياة

التقطَتْ محطتّا خفرِ الســواحلِ A وَ B نداءَ اســتغاثةٍ منْ ســفينةٍ عندَ النقطةِ C في البحرِ، وقدْ حدَّدَتِ المحطةُ A اتجاهَ الســفينةِ عندَ 040°، وحدَّدَتِ المحطةُ B اتجاهَ السفينةِ عندَ 330°. إذا كانَتْ B شرقيَّ A وكانتِ المسافةُ بينَ المحطَّتيْنِ 120 km، فكمْ تبعدُ السفينةُ عنِ المحطَّةِ A؟



يجبُ أولًا إيجادُ قياسِ الزاويةِ C:

قياسُ الزاويةِ BAC هوَ 50° (لأنَّها مُتمِّمةٌ للزاويةِ التي قياسُها 40°).

وقياسُ الزاويةِ ABC هوَ 60° (لأنَّ $330^\circ - 270^\circ = 60^\circ$). إذنْ:

$m\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$

ثمَّ استعمالُ قانونِ الجيوبِ:

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ قانونُ الجيوبِ

$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ}$ بالتعويضِ

$b = \frac{120 \times \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$ بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 60^\circ$

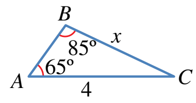
$\approx 110.59\text{ km}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

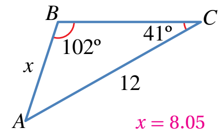
أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ المحطَّةِ B في المثالِ السابقِ.

أتدرب وأحل المسائل

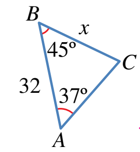
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1


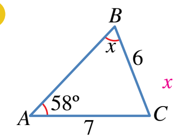
$x = 3.639$

2


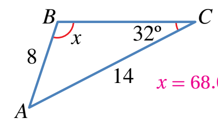
$x = 8.05$

3


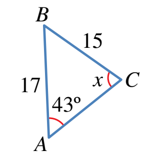
$x = 19.45$

4


$x = 46.63°$

5


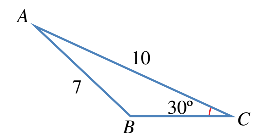
$x = 68.03°$

6


$x = 36.23°$

7 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.

$B = 180° - 45.58° = 134.42°$



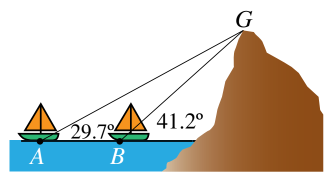
8 **خرائطُ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

76.6 km

9 **بحارٌ:** ترصدُ سفينتانِ في البحرِ قِمَّةَ جبلٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ السفينتيْنِ 1473 m، فما ارتفاعُ الجبلِ منْ مستوى سطحِ البحرِ؟

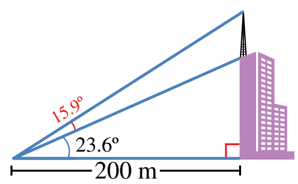
$BG = \frac{1473 \sin(29.7)}{\sin(11.5)} = 3660.6$ m

$CG = \frac{3660.5 \sin(41.2)}{\sin(90)} = 2411.2$ m



10 **أبراجُ إرسالٍ:** رصدَ معاذٌ ارتفاعَ مبنًى، وارتفاعَ برجِ إرسالٍ فوقَهُ كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ ارتفاعَ برجِ الإرسالِ.

77.49 m



4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الفردية ضمن مجموعات).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مهارات التفكير العليا

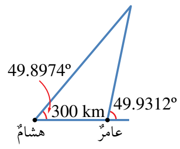
- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية غير متجانسة، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

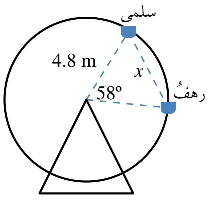
11 **علمُ الفَلكِ:** رصدَ عامرٌ وهشامٌ منْ منزليْهِما نجمًا في السماءِ في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَتْ زاويةُ رصدِ هشــامٍ للنجمِ 49.8974°، وزاويةُ رصدِ عامرٍ لهُ 49.9312°، والمســافةُ بينَ منزليْهِما 300 km، فأُقدِّرُ بُعْدَ النجمِ عنِ الأرضِ.

388980.1394 km

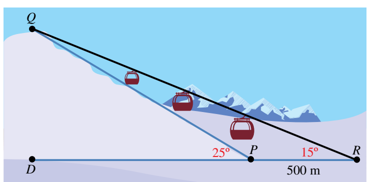


12 **مدينةُ الألعابِ:** في مدينةِ الألعابِ، جلسَــتْ سلمى ورهفُ على مقعديْنِ منفصليْنِ في لعبةِ الدولابِ الدوّارِ كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ x بينَهُما.

$x = 3.79$ m



13 **رياضةُ التزلُّجِ:** يتكوَّنُ مسارُ تزلُّجٍ منْ جزءٍ مائلٍ، وآخرَ مستقيم. إذا تزلَّجَ محمودٌ منَ النقطةِ Q إلى النقطةِ P، ثمَّ وصلَ خــطَّ النهايةِ عندَ النقطةِ R، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ مســارِ التزلُّجِ عنِ الأرضِ 25°، والمســافةُ بينَ النقطتيْنِ P وَ R هيَ 500 m، وزاويةُ رصْدِ الحَكَمِ منْ نقطةِ النهايةِ للمُتزلِّجِ الذي يقفُ عندَ نقطةِ البدايةِ 15°، فما طولُ مسارِ التزلُّجِ QP؟

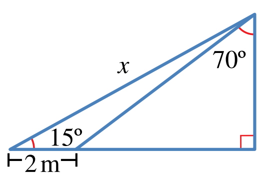


$QP = 745.24$ m

$QP = 500 + 745.25 = 1245.24$ m

14 أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

$x = 7.848$



5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شــبكة الإنترنت أو مكتبة المدرســة عن تطبيقات حياتية لقانون الجيوب، مثل استعماله لفرز الأراضي، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.
- اطلب إلى الطلبة رســم مثلثين، عُلِم فــي كلٍّ منهما زاويتان وضلــع؛ أحدهما حاد الزوايا، والآخر منفرج الزاوية، وتطبيق قانون الجيوب لحل المثلث، مراعين خصائص المثلثات التي تعلموها ســابقًا للحكم على معقولية السؤال.
- اطلب الى الطلبة من ذوي المســتوى فوق المتوسط اشــتقاق قانون الجيــوب بطريقة مختلفــة عن تلك الواردة في بداية الدرس.

تعليمات المشروع:

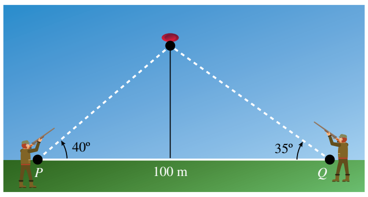
- وجِّــه الطلبة إلــى اســتكمال الخطــوة الأولى من المشروع؛ لمَنْ لم يُنْهِ صنع الجهاز الخاص به.
- أخبر الطلبة أنه يمكنهم البدء بتنفيذ الخطوة الثانية، وأنه يتعيَّن على الذين طبَّقوا قانون الجيوب على المثلثات التأكُّد من نتائج حساباتهم جبريًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا.

6 الختام

- اطلب إلى بعض الطلبة كتابة العلاقات المختلفة لقانون الجيوب على اللوح.
- اطلب إلى كل طالب رسم مثلث على ورقة (أو ألواح صغيرة)، ثم تلوين الزوايا والأضلاع المعلومة فيه بلون أزرق مثلًا، وتلوين الضلع أو الزاوية المطلوبة بلون آخر (أحمر مثلًا)، ثم كتابة الصورة المناسبة من القانون التي تُمكّنهم من حل السؤال.
- اطلب إلى الطلبة رفع أوراقهم عاليًا، وتابعهم في هذه الأثناء.

مهارات التفكير العليا

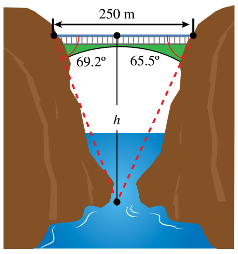
15 **تبريرٌ**: أطلقَ قنّاصانِ النارَ على هدفٍ مُتحرِّكٍ في السماءِ في لحظةٍ ما. إذا كانَتْ زاويةُ إطلاقِ الأولِ 40°، وزاويةُ إطلاقِ الثاني 35°، والمسافةُ بينَهُما 100 m، فأيُّهُما سيصيبُ الهدفَ أولًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.



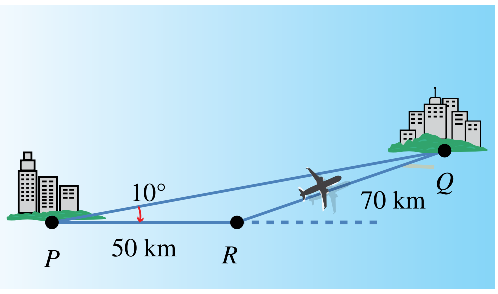
المسافة بين القناص الأول والهدف هي 59,38، والمسافة بين القناص الثاني والهدف هي 66,55
إذن: القناص الأول يصيب الهدف؛ لأن المسافة بينه وبين الهدف أقل.

16 **تحدٍّ**: مرَّ قاربٌ أسفلَ جسرٍ طولُهُ 250 مترًا. وقدْ رصدَ الشخصُ الذي في القاربِ الزاويتيْنِ اللتيْنِ تقعانِ عندَ طرفَيِ الجسرِ، فكانَتا 69.2° وَ 65.5°، أَجِدُ ارتفاعَ الجسرِ عنِ القاربِ.

$h = 299.19$ m



17 **تبريرٌ**: توجَّهَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ P إلى المدينةِ Q، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 50 km أدركَ الطيّارُ وجودَ خطأٍ في زاويةِ الانطلاقِ مقدارُهُ 10°، فاستدارَ في الحالِ، وقطعَتِ الطائرةُ مسافةَ 70 km حتّى وصلَتِ المدينةَ Q. إذا كانَتْ سرعةُ الطائرةِ بمقدارٍ ثابتٍ هيَ 250 km/h، فما الوقتُ الإضافيُّ الذي استغرقَهُ الطيّارُ بسببِ خطئِهِ في زاويةِ الانطلاقِ؟



$PQ = 54.25$ km

وقت $PQ=0.217\times60=13.02$ دقيقة ، وقت $PR=0.2\times60=12$ دقيقة ، وقت $RQ=0.28\times60=16.8$ دقيقة.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يستنتج قانون جيوب التمام.
- يحل مثلثًا عُلِم منه طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما.
- يحل مثلثًا عُلِمت أطوال أضلاعه جميعًا.
- يحل مسائل حياتية باستعمال قانوني الجيوب وجيوب التمام.

المواد والأدوات:

صندوق يحوي مجموعة بطاقات رُسِم عليها مثلثات مختلفة.

التعلم القبلي:

- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا ضمن دورة واحدة.
- التطبيق على نظرية فيثاغورس.
- التطبيق على الاتجاه من الشمال.
- استعمال قانون الجيوب لحل المثلث.

1 التهيئة

- اسأل الطلبة عن الحالات التي يمكن فيها استعمال قانون الجيوب لإيجاد طول ضلع، أو قياس زاوية مجهولة في مثلث. إذا عُلِم في المثلث ضلعان وقياس زاوية مقابلة لأحدهما، أو عُلِم فيه قياسا زاويتين وضلع بينهما.
- ارسم مثلثان، أحدهما عُلِمت جميع أضلاعه، والآخر عُلِم منه ضلعان وزاوية محصورة، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد ضلع أو زاوية مجهولة في كلٍّ منهما.
- استمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم اسألهم:
  » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  » اذكر هذه الإجابة.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

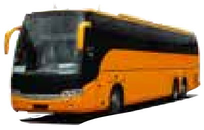
الدرس 3

قانونُ جيوبِ التمامِ
Law of Cosines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ.

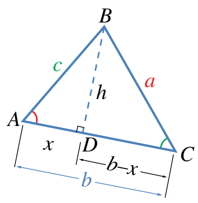
المصطلحاتُ قانونُ جيوبِ التمامِ.

مسألةُ اليومِ انطلقَتْ حافلتانِ منْ محطَّةٍ واحدةٍ في الوقتِ نفسِهِ، وقدِ اتَّجهَتِ الأولى شرقًا بسرعةِ 60 km/h ، وانطلقَتِ الثانيةُ في مسارٍ يَصنعُ زاويةَ 30° معَ مسارِ الحافلةِ الأولى بسرعةِ 50 km/h. هلْ يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ الحافلتيْنِ بعدَ مُضِيِّ 3 ساعاتٍ على انطلاقِهما؟



تعرَّفْتُ في الدرسِ السابقِ قانونَ الجيوبِ، وكيفَ يُستعمَلُ لحَلِّ مثلثاتٍ عُلِمَ فيها ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA)، أوْ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهِما (SSA).

تُستعمَلُ أيضًا نسبةُ جيبِ التمامِ لإيجادِ علاقاتٍ أُخرى بينَ أطوالِ الأضلاعِ وقياساتِ الزوايا؛ ما يساعدُ على حَلِّ بعضِ المثلثاتِ التي لا يُمكِنُ حَلُّها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.



ففي الشكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ h الارتفاعَ المرسومَ منْ B عموديًّا على AC. وباستعمالِ نظريةِ فيثاغورس وتعريفِ جيبِ التمامِ، يُمكِنُ استنتاجُ بعضِ العلاقاتِ على النحوِ الآتي:

باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس في المثلثِ ADB	$h^2 = c^2 - x^2$
باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس في المثلثِ BDC	$h^2 = a^2 - (b-x)^2$
بمساواةِ المعادلتيْنِ $h^2 = h^2$	$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$
بفكِّ القوسِ	$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2$
بالتبسيطِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$

لإدخالِ جيبِ التمامِ في المعادلةِ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$ ، فإنَّنا نكتبُ x بدلالةِ $\cos A$:

تعريفُ جيبِ التمامِ	$\cos A = \frac{x}{c}$
بالضربِ التبادليِّ	$x = c \times \cos A$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**).
- اطلب إلى أحد الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط رسم المثلث الذي يُمثِّل المسألة.
- اطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - » ما الضلع المجهول في الرسم؟ الضلع الواصل بين موقع الحافلتين بعد 3 ساعات.
  - » هل يمكن استعمال قانون الجيوب لإيجاده؟ لا؛ لأنَّ الزاوية المعلومة محصورة بين الضلعين المعلومين، ولأنه ينتج من تطبيق قانون الجيب معادلة فيها مجهولان.
- استمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم اسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المثلث triangle، وحل المثلث solving triangle، والزاوية angle، وقانون الجيوب Law of Sines، وقانون جيوب التمام Law of Cosines.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة كيفية اشتقاق قانون جيوب التمام (Law of Cosines) الوارد بداية الدرس في كتاب الطالب، مُبيِّنًا علاقات القانون الثلاث، ثم اكتبها على اللوح.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حل المثال 1، ودرِّبهم على استعمال القانون لإيجاد طول الضلع الثالث في المثلث، مُركِّزًا على اختيار العلاقة المناسبة بين القياسات المعطاة.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- تابع الطلبة في هذه الأثناء، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

ملاحظات المعلم

إرشادات للمعلم

قد تكون خطوات اشتقاق القانون غير واضحة للطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط؛ لذا وضِّحها لهم بعرض مثال على مثلث عُلِمت جميع أطوال أضلاعه وقياسات زواياه، مُطبِّقًا قانون جيوب التمام للتحقق من صحة خطوات اشتقاق قانون جيوب التمام.

وبذلكَ، نتوصَّلُ إلى العلاقةِ الآتيةِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ باستعمالِ جيبِ التمامِ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

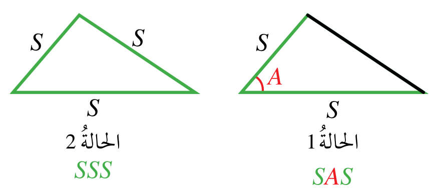
وبطريقةٍ مشابهةٍ، يُمكِنُ التوصُّلُ إلى العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

تُسمّى هذهِ العلاقاتُ الثلاثُ **قانونَ جيوبِ التمامِ** (Law of Cosines)، ويُستعمَلُ هذا القانونُ لحَلِّ أيِّ مثلثٍ عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. ضلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما (SAS).
2. ثلاثةُ أضلاعٍ (SSS).



أتعلّم

يُمكِنُ كتابةُ قانونِ جيوبِ التمامِ كما يأتي:

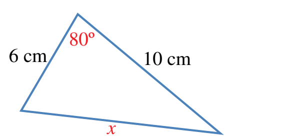
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.



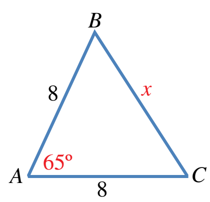
$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80°$ قانونُ جيوبِ التمامِ

$x^2 = 115.16$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$x = 10.7$ cm بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.



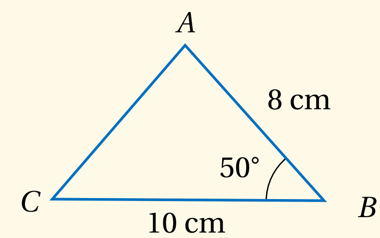
يُستعمَلُ قانونُ جيوبِ التمامِ أيضًا لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي)، فيستعملون نظرية فيثاغورس أو قانون الجيوب؛ لذا ذكِّرهم بخطوات الحل عند استعمال نظرية فيثاغورس، أو قانون الجيوب.

مثال إضافي

- جد CA في الشكل المجاور. 7.82 cm

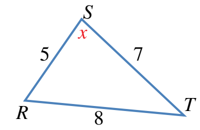


إجابة أتحقق من فهمي 1:

8.6

مثال 2

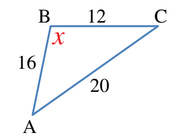
أجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المجاورِ.



قانونُ جيوبِ التمامِ	$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos x$
بكتابةِ $\cos x$ موضوعِ القانونِ	$\cos x = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\cos x = 0.1428$
معكوسُ جيبِ التمامِ	$x = 81.8°$

أتحقق من فهمي

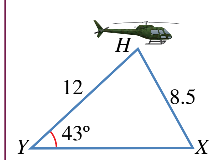
أجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC المجاورِ.



قدْ نحتاجُ في بعضِ المسائلِ إلى استعمالِ قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا لإيجادِ القياساتِ المطلوبةِ.

مثال 3: من الحياة

شوهِدَتْ طائرةٌ مروحيةٌ تُحلِّقُ في السماءِ منَ القريتيْنِ X وَ Y في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَ بُعْدُ الطائرةِ عنِ القريةِ X هوَ 8.5 km، وعنِ القريةِ Y هوَ 12 km، وكانَتِ القريتانِ في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ، وزاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ منَ القريةِ Y هيَ $43°$، فما المسافةُ بينَ هاتيْنِ القريتيْنِ؟



لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ، يجبُ معرفةُ قياسِ الزاويةِ بينَ الضلعيْنِ اللذيْنِ يُمثِّلانِ بُعْدَيِ الطائرةِ عنِ القريتيْنِ كما يأتي:

الخطوةُ 1: استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ X في المثلثِ HYX.

قانونُ الجيوبِ	$\frac{\sin 43°}{8.5} = \frac{\sin X}{12}$
بضربِ الطرفيْنِ في 12	$\sin X = \frac{12 \sin 43°}{8.5}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\sin X \approx 0.963$
معكوسُ sin	$X = \sin^{-1} 0.963$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$\approx 74.3°$

الخطوةُ 2: إيجادُ قياسِ الزاويةِ H.

إرشاد:

- يتعيَّن على الطلبة في المثال 2 استعمال معكوس جيب التمام؛ لذا وجِّههم إلى استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج.
- أخبر الطلبة أن درس (معكوس الاقترانات المثلثية) سوف يرد في دروس الفصل الدراسي الثاني.

تنبيه: قد يخطئ بعض الطلبة في أولويات العمليات الحسابية في أثناء الحل؛ لذا ذكِّرهم بالأولويات، ثم أرشدهم إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال الآلة الحاسبة، ودرِّبهم على استعمالها بصورة صحيحة.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

90

إجابة أتحقق من فهمي 3:

183.9 km

مثال 2

- ارسم على اللوح مثلثًا، ثم اسأل الطلبة:
  » إذا عُلِمت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة، فكيف يمكن إيجاد إحدى زواياه؟
- اطلب إلى أحد الطلبة أن يكتب العلاقة المناسبة لإيجاد الزاوية المجهولة، ثم اطلب إلى زملائه أن يكتبوا على اللوح العلاقة بصورة أخرى؛ بحيث تكون نسبة جيب التمام موضوعًا للقانون. بعد ذلك اطلب إلى آخرين كتابة العلاقات الأخرى على اللوح.
- ناقِش الطلبة في حل المثال 2، مُركِّزًا على تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

تنويع التعليم

- نبِّه الطلبة إلى أن تقريب الإجابة في الخطوات التي تسبق الخطوة النهائية قد يجعل الإجابة النهائية غير دقيقة.
- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط تقريب إجاباتهم في الخطوات قبل النهائية إلى العدد المناسب من المنازل بحيث تحوي 4 أرقام.

مثال 3: من الحياة

- ارسم على اللوح مثلثًا، ثم عيِّن عليه ضلعين وزاوية غير محصورة، وأخبر الطلبة أن المطلوب هو إيجاد الزاوية المحصورة، ثم اسألهم:
  » كيف يمكن إيجاد قياس الزاوية المحصورة؟ بتطبيق قانون الجيوب أولًا، ثم قانون جيوب التمام.
- استمع لإجابات الطلبة، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش الطلبة في حل المثال 3، مُذكِّرًا إيّاهم بضرورة اختيار القوانين ذات الرموز الصحيحة التي تناسب معطيات المسألة ومطلوبها.

إرشاد: قد لا يتمكَّن الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط من فهم المثال؛ لذا اسرد لهم قصة تُوضِّحه، وطبِّق الموقف عمليًّا لتسهيل الحل.

مثال 4: من الحياة

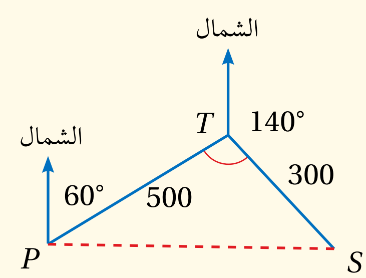
- راجِع الطلبة في درس (الاتجاه من الشمال) قبل شرح المثال 4
- ناقِش الطلبة في حل المثال 4 الذي يُبيِّن كيف يُستعمَل قانون جيوب التمام والاتجاه من الشمال في موقف حياتي.

إرشادات:

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد ناتج الحسابات؛ لذا وجِّههم إلى حل السؤال ضمن مجموعات، والاستعانة بأحد الزملاء من ذوي المستوى المتوسط أو فوق المتوسط.
- قد يواجه الطلبة صعوبة في إيجاد قياس الزاوية التي تُمكِّنهم من حل السؤال؛ لذا درِّبهم على مزيد من الأمثلة، مُؤكِّدًا ضرورة رسم الحالة بنموذج بسيط يُمثِّلها.

مثال إضافي

- جد PS في الشكل المجاور.



$180° - 43° - 74.3° = 62.7°$. مجموعُ قياس زوايا المثلث 180°

الخطوةُ 3: استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ.

$(XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2\,(12)\,(8.5)\cos 62.7°$ قانونُ جيوبِ التمام

$(XY)^2 = 122.7$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$XY = \sqrt{122.7} = 11.1$ بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

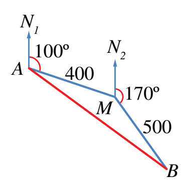
إذنْ، المسافةُ بينَ المدينتيْنِ 11.1 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي

سفنٌ: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A باتجاهِ الشمالِ، فقطعَتْ مسافةَ 240 km، ثمَّ انحرفَتْ بزاويةِ 50°، وقطعَتْ مسافةَ 160 km حتّى وصلَتْ إلى الميناءِ B. ما المسافةُ بينَ الميناءِ A والميناءِ B؟

مثال 4: من الحياة

أقلعَتْ طائرةٌ بزاويةِ 100° عنِ الشمالِ منَ المدينةِ A، فقطعَتْ مسافةَ 400 km، ثمَّ انعطفَتْ يمينًا، فأصبحَتِ الزاويةُ بينَ خطِّ مسارِها الجديدِ والشمالِ 170°، ثمَّ قطعَتْ مسافةَ 500 km لتصلَ إلى المدينةِ B. ما المسافةُ بينَ هاتيْنِ المدينتيْنِ؟



يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ المدينتيْنِ (طولُ القطعةِ المستقيمةِ AB) بإيجادِ قياسِ الزاويةِ AMB.

منَ المُلاحَظِ أنَّ الزاويةَ AMN_2 مُكمِّلةٌ للزاويةِ MAN_1، وهيَ تساوي 80°.

$m\angle AMB = 360° - (80° + 170°) = 110°$ مجموعُ الزوايا حولَ نقطةٍ

$(AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110°$ قانونُ جيوبِ التمام

$(AB)^2 = 546808.0573$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ

إذنْ، المسافةُ بينَ المدينتيْنِ 739.5 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي

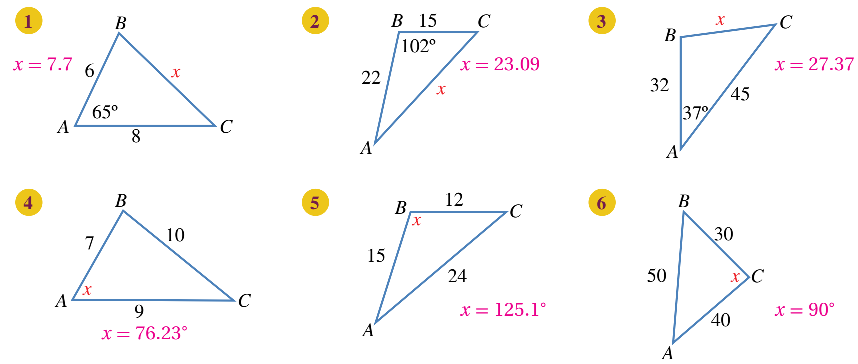
سارَ قطارٌ منَ المحطَّةِ A في اتجاهِ 080° إلى المحطَّةِ B التي تبعدُ عنْها 120 km، ثمَّ تحوَّلَ إلى اتجاهِ 070°، وسارَ مسافةَ 90 km إلى المحطَّةِ C. ما المسافةُ بينَ المحطَّةِ A والمحطَّةِ C؟

إجابة أتحقق من فهمي 4:

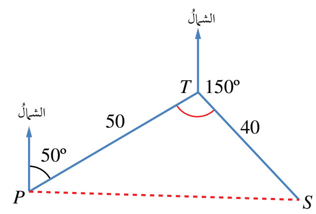
206.88 km

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ مِنَ المثلثاتِ الآتيةِ:

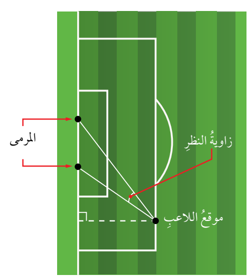


7 **ملاحةٌ جويةٌ:** أبحرَتْ سفينةٌ منْ أحدِ الموانئِ مسافةَ 50 km في اتجاهِ °050، ثمَّ غيَّرَ القبطانُ خطَّ سيرِها إلى اتجاهِ °150 وقطعَتْ مسافةَ 40 km، ثمَّ توقَّفَتْ بسببِ إصابةِ أحدِ أفرادِ الطاقمِ. ما المسافةُ التي ستقطعُها مروحيةُ الإنقاذِ منَ الميناءِ لتصلَ إلى السفينةِ في أقصرِ وقتٍ مُمكنٍ؟ 86.97 km



8 **كرةُ قدمٍ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ موقع لاعبَ كرةِ قدمٍ يركلُ الكرةَ نحوَ مرمًى عرضُهُ 5 m. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ التي يستطيعُ منها اللاعبُ أنْ يركلَ الكرةَ لتسديدِ هدفٍ، علمًا بأنَّهُ يبعدُ عنْ طرفَيِ المرمى مسافةَ 26 m وَ 23 m.

9.38°



4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، واطلب إليهم مناقشة بعضهم في الإجابات.
- ركِّـز على معالجـة الأخطـاء المفاهيميـة، أو تلك المُتعلِّقة بالمهارات الحسـابية يدويًّا، أو باسـتعمال الآلة الحاسبة، ثم ناقِش الطلبة فيها على اللوح.

مهارات التفكير العليا

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية غير متجانسة، بحيث تضم طلبة من ذوي المسـتوى فوق المتوسط، وآخرين من ذوي المستوى دون المتوسط.
- اطلب إلى أفراد المجموعات حل الأسئلة، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسط صعوبة في حل أسـئلة بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، فاطلب إلى طالب من ذوي المستوى فوق المتوسط مساعدتهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة مـن كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسـة عن تطبيقات حياتية لقانون جيوب التمام، مثل استخدامه في فرز الأراضي.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت عن دلالة كلمـة (BEDMAS) وعلاقتهـا بأولويات العمليات الحسابية.
- ذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

تعليمات المشروع:

- وجِّـه الطلبة إلـى متابعة تنفيـذ الخطـوة الثانية من المشروع.
- اطلب إلـى الطلبة الذين طبَّقوا قانـون جيوب التمام علـى المثلثات التأكُّـد من نتائج حسـاباتهم جبريًّا، وباستعمال برمجية جيوجبرا.

6 الختام

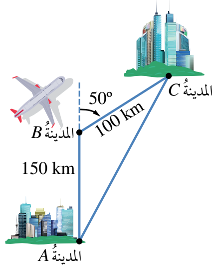
نشاط: كيف أجد الحل؟

المواد والأدوات:

- صندوق يحوي مجموعة بطاقات رُسِم عليها مثلثات مختلفة (بعضها يُحَل باسـتعمال قانون الجيوب، أو قانون جيوب التمام، أو القانونين معًا).

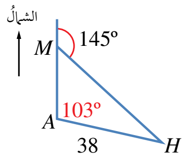
خطوات العمل:

- قسِّـم اللوح إلى ثلاثة أقسام، ثم اكتب فيها بالترتيب: قانون الجيوب، قانون جيوب التمام، القانونان معًا.
- اسـتعمل اسـتراتيجية الـرؤوس المرقمـة لاختيار مجموعة من طلبة الصف.
- اطلـب إلى كل فرد في المجموعة سـحب بطاقة من الصندوق، وقراءة السـؤال المُـدوَّن عليها، وتحديد القانون المناسب لحل السؤال، ثم لصق البطاقة أسفل القسم الصحيح من اللوح.
- اطلب إلى بقية الطلبة تقييم إجابات زملائهم.
- كرِّر الخطوات السـابقة باختيـار مجموعة أخرى من الطلبة (بحسب عدد البطاقات في الصندوق).



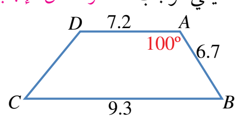
9 **خرائطُ طيـرانٍ:** أقلعَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ A في اتجاهِ 000° مسـافةَ $150\ km$، ثمَّ اتَّجهَتْ إلى 050°، وسـارَتْ مسـافةَ $100\ km$ حتّى وصلَـتِ المدينةَ C كما في الشـكلِ المجاورِ. ما أقصرُ مسـافةٍ ممكنةٍ بينَ المدينتيْنِ إذا كانَ مسموحًا للطائرةِ اتِّخاذُ المسارِ الذي تريدُ؟ $227.56\ km$

مهارات التفكير العليا

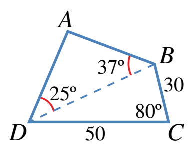


10 **مروحيـةُ إنقاذٍ:** أُرسِـلَتْ مروحيةُ إنقاذٍ منَ القاعدةِ A لإسـعافِ رجـلٍ على جبلٍ عندَ النقطةِ M إلى الشـمالِ منْ هذهِ القاعدةِ، ثمَّ أوصلَتْهُ إلى المستشـفى H الذي يبعدُ عنِ القاعدةِ مسـافةَ $38\ km$ كما يظهرُ في الشـكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسـافةَ منَ الجبلِ إلى المستشفى بطريقتيْنِ. $64.55\ km$

11 **تحدٍّ:** أَجِدُ قياسَ أصغرِ زاويةٍ في مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ $3a, 5a, 7a$ ، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ. انظر ملحق الإجابات

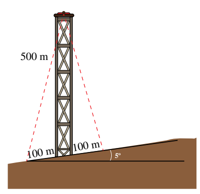


12 **تحدٍّ:** أَجِدُ طولَ الضلعِ CD في شبهِ المنحرفِ المجاورِ.
$DB = 10.65\ km$



13 **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ حقلَ النخيلِ $ABCD$ الذي يريدُ مالِكُهُ إحاطةَ سياجٍ بهِ. أَجِدُ طولَ السياجِ.
$AB = 25.68$
$AD = 36.57$
$\Rightarrow 25.68 + 36.57 + 30 + 50 = 142.25$

14 **ساعاتٌ:** طولُ عقربَيْ ساعةٍ $3\ cm$، وَ $4\ cm$. أَجِدُ المسافةَ بينَ رأسَيِ العقربيْنِ عندما يشيرانِ إلى الساعةِ 4 تمامًا. الزاوية بين العقربين: 120=90+30
إذن: المسافة بين العقربين هي 6 سم.



15 **أبراجٌ:** يرتفعُ برجٌ $500\ m$ على تلَّةٍ تميلُ بزاويةِ 5° عنِ المستوى الأفقيِّ كما في الشكلِ المجاورِ. أرادَتِ المهندسـةُ صفاءُ تثبيتَ البرجِ بسـلكيْنِ منْ قمَّتِـهِ إلى نقطتيْنِ على الأرضِ، تبعدُ كلٌّ منْهُما مسافةَ $100\ m$ عنْ قاعدةِ البرجِ. أَجِدُ طولَ السلكيْنِ.
طول السلك الأول: 518.38
طول السلك الثاني: 501.28

المفاهيم العابرة:

بعد الانتهاء من حل السـؤال 7، عزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا الوطنية (الوعي الوطني)، بتنظيم حوار معهم عن الملاحة البحرية والملاحة الجوية في المملكة، وسـؤالهم عن عدد الموانئ والمطارات فيها، ثم اطلب إليهم كتابة مقالة عن ميناء العقبة ونشأته وأهميته، أو مطار الملكة علياء ونشأته وأهميته.

الدرس 4

استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ
Using Sine to Find the Area of a Triangle

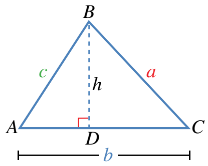
فكرةُ الدرسِ إيجادُ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَ فيهِ طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

مسألةُ اليومِ لدى مُزارِعٍ قطعةُ أرضٍ مثلثةُ الشكلِ، طولُ أحدِ أضلاعِها 84 m، وطولُ ضلعٍ آخرَ 110 m، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما 145°، وقدْ أرادَ زراعتَها بالبطاطا، فلَزِمَهُ 0.15 kg منْ درناتِ البطاطا لكلِّ مترٍ مربَّعٍ. كيفَ يستطيعُ المُزارِعُ حسابَ كميةِ درناتِ البطاطا اللازمةِ لزراعةِ أرضِهِ؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ مساحةِ المثلثِ بضربِ نصفِ طولِ قاعدتِهِ في ارتفاعِهِ، غيرَ أنَّهُ يتعذَّرُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ إذا كانَ الارتفاعُ مجهولًا؛ لذا يُمكِنُ استخدامُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ قانونٍ آخرَ لحسابِ مساحةِ المثلثِ باستعمالِ أطوالِ أضلاعِهِ وقياساتِ زواياهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، نُلاحِظُ أنَّ BD هوَ ارتفاعُ المثلثِ ABC، وأنَّهُ عموديٌّ على القاعدةِ AC.

فإذا كانَ $AC = b$ ، وَ $BD = h$، فإنَّ مساحةَ هذا المثلثِ هيَ:

$$K = \frac{1}{2} AC \times BD$$
$$= \frac{1}{2} bh$$



نُلاحِظُ أيضًا منَ المثلثِ BDC ما يأتي:

تعريفُ جيبِ الزاويةِ $\sin C = \frac{h}{a}$

بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في a $h = a \sin C$

بالتعويضِ عنْ h في قانونِ مساحةِ المثلثِ بـ $a \sin C$ $K = \frac{1}{2} b (a \sin C)$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

يُمكِنُ رسمُ العمودِ منَ الرأسِ A إلى الضلعِ الذي يقابلُهُ BC، ومنَ الرأسِ C إلى الضلعِ الذي يقابلُهُ AB، لبيانِ أنَ مساحةَ هذا المثلثِ تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$ ، وأنَّها تساوي أيضًا $\frac{1}{2} bc \sin A$.

131

الدرس 4

نتاجات الدرس

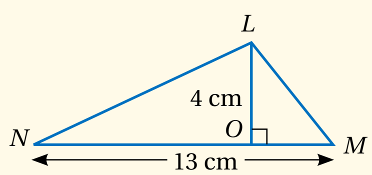
- يجد مساحة مثلث عُلِم منهُ: طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما، أو أَطوال أضلاعه الثلاثة، أو طول ضلع وزاويتان، أو طولا ضلعين وزاوية تقابل أحدهما.
- يحل مسائل رياضية وحياتية عن مساحة المثلث.

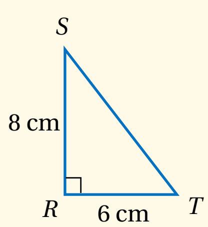
التعلم القبلي:

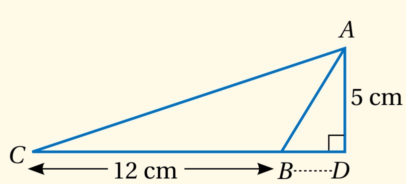
- حساب مساحة المثلث بدلالة طول قاعدته وارتفاعه.
- حل المثلث باستعمال قانوني الجيوب، وجيوب التمام.

1 التهيئة

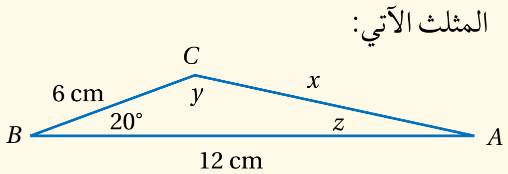
- اعرض أمام الطلبة لوحة رُسِمت عليها المثلثات الآتية، ثم اطلب إليهم حساب مساحة كلٍّ منها:







- اطلب إلى الطلبة إيجاد الأطوال والزوايا المجهولة في المثلث الآتي:



$x = 6.68$ cm; $y = 142.2°$; $z = 17.8°$

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

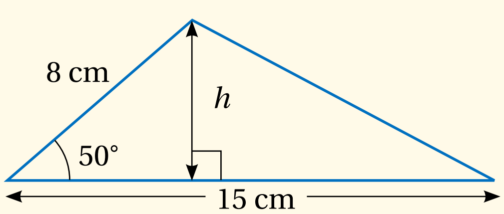
- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند **(مسألة اليوم)** واسألهم:
  - » مـاذا يفعل هذا المزارع ليتمكَّن من تحديد كمية درنات البطاطا التي تلزمه؟ إيجاد مساحة قطعة الأرض، ثم ضرب المساحة في الكمية اللازمة للمتر المربع الواحد.
  - » ما الذي يجب معرفته لإيجاد مساحة مثلث؟ طول قاعدته، وارتفاعه.
  - » ما ارتفاع المثلث؟ طول العمود المرسوم من أحد رؤوسه إلى الضلع المقابل أو امتداده.
  - » مَنْ يرسم رسمًا توضيحيًّا يُمثِّل المسألة؟
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.
  - » كيف يمكن إيجاد الارتفاع في هذا السؤال بطريقة أخرى؟ باستعمال نسبة جيب الزاوية.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المثلث triangle، والمساحة area، والزاوية angle، وقانون الجيوب Law of Sines، وقانون جيوب التمام Law of Cosines.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة بمثال كيفية التوصُّل إلى قانون لإيجاد مساحة المثلث باستعمال طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، اعتمادًا على القانون الأساسي لمساحة المثلث الذي يعرفونه.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- ارسم على اللوح المثلث المجاور، ثم اطلب إلى أفراد المجموعات إيجاد مساحته في ثلاث دقائق.



مساحة هذا المثلث: $\frac{1}{2} \times 15 \times h$

إيجاد قيمة h من العلاقة: $\sin 50° = \frac{h}{8}$

$h = 8 \times \sin 50°$

إذن: مساحة هذا المثلث هي: $\frac{1}{2} \times 15 \times 8 \times \sin 50° = 46.0 \text{ cm}^2$

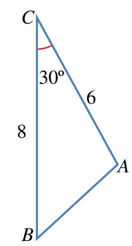
- تابع الطلبة في هذه الأثناء، وقدِّم لهم التغذية الراجعة، ثم ناقِشهم في الحل على اللوح.
- اكتب على اللوح برهان قانون مساحة المثلث باستعمال طولي ضلعين وجيب الزاوية المحصورة بينهما بصوره الثلاث.

مفهومٌ أساسيٌّ

مساحةُ المثلثِ تساوي نصفَ ناتجِ ضربِ طولَيْ أيِّ ضلعيْنِ فيهِ مضروبًا في جيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

$K = \frac{1}{2} bc \sin A \quad K = \frac{1}{2} ac \sin B \quad K = \frac{1}{2} ab \sin C$

مثال 1



أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.

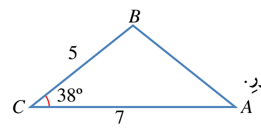
قانونُ مساحةِ المثلثِ $K = \frac{1}{2} ab \sin C$

بالتعويضِ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 30°$

$= 12$

أتحقق من فهمي

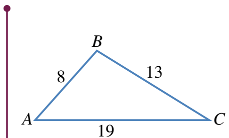
أَجِدُ مساحةَ المثلثِ بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.



انظر الهامش.

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ كيفَ أَجِدُ مساحةَ مثلثٍ عُلِمَ فيه طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما، وسأتعلَّمُ الآنَ كيفيةَ حسابِ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَتْ فيهِ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ.

مثال 2



أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.

يتعيَّنُ أولًا إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، ثمَّ حسابُ المساحةِ.

إذنْ، أستعملُ قانونَ جيوبِ التمامِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ C:

قانونُ جيوبِ التمامِ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

بالتعويضِ $= \frac{13^2 + 19^2 - 8^2}{2 \times 13 \times 19}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 0.9433$

معكوسُ $\cos$، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ $C = \cos^{-1} 0.9433 = 19.4°$

إجابة أتحقق من فهمي 1:

10.8 cm^2

مثال 1

- ناقِش الطلبة في حـل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مسـاحة مثلث، عُلِم منه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما بالتطبيق المباشر للقانون.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حـل التدريب في بنـد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- تابع الطلبة في هذه الأثناء، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- جد مسـاحة المثلث ABC الذي فيـه $AC = 3$ cm، و $AB = 7$ cm، وقياس الزاويـة $BAC = 112°$

9.74 cm^2

إرشادات للمعلم

وضِّح للطلبة أن حل بعض الأسئلة يتطلب استعمال قانون جيوب التمام وقانون الجيوب؛ لإيجاد قياس زاوية بين ضلعين معلومـي الطول، ثم تطبيق قانون إيجاد مساحة المثلث.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حـل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مساحة مثلث عُلِمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال إضافي

- ما مســاحة لوحة إعلانــات مثلثة الشــكل، أبعادها 30 cm، و40 cm، و60 cm؟ $533.3\ cm^2$

مثال 3: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية حساب مساحة مثلث في موقف حياتي.

مثال إضافي

- إذا كانت المسافة بين إربد وجرش 38 km، والمسافة بين إربد والرمثا 28 km، والمسافة بين الرمثا وجرش 40 km ، فما مســاحة المثلث الذي تقع عند رؤوسه هذه المدن الثلاث؟ $508.3\ km^2$

تنويع التعليم:

- نبِّه الطلبة إلى أن تقريب الإجابــة في الخطوات التي تســبق الخطوة النهائية قد يجعل الإجابة النهائية غير دقيقة.
- اطلب إلى الطلبة من ذوي المســتوى دون المتوسط تقريب إجاباتهم في الخطوات قبل النهائية إلى العدد المناسب من المنازل بحيث تحوي 4 أرقام.
- وضِّح للطلبة ذوي المســتوى فوق المتوســط كيف تُحفَــظ الإجابة في الخطوات قبــل النهائية في ذاكرة الحاسبة (من دون تقريب)، وكيف تُستعاد وتُستعمَل في حسابات لاحقة.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

$44.04\ cm^2$

إجابة أتحقق من فهمي 3:

$1749.5\ cm^2$

أُطبِّقُ قانونَ المساحةِ:

$K = \frac{1}{2}ab\sin C$ قانونُ مساحةِ المثلثِ

$= \frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times \sin 19.4^\circ$ بالتعويضِ

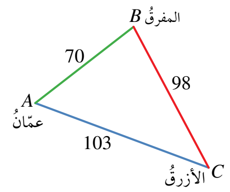
$= 41.0\ cm^2$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF، علمًا بأنَّ $DE = 10$ cm، وَ $DF = 12$ cm، وَ $EF = 9$ cm. انظر الهامش.

مثال 3: من الحياة

المســافةُ بيــنَ عمّــانَ والأزرقِ 103 km، وبيــنَ عمّــانَ والمفــرقِ 70 km، وبيــنَ المفــرقِ والأزرقِ 98 km. أَجِــدُ مســاحةَ المثلــثِ الــذي تقــعُ عنــدَ رؤوسِــهِ هــذهِ المــدنُ الثــلاثُ.



الخطوةُ 1: إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا، ولتكنْ B ، باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ.

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ قانونُ جيوبِ التمامِ

$= \frac{98^2 + 70^2 - 103^2}{2 \times 98 \times 70}$ بالتعويضِ

$= 0.2839$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$B = \cos^{-1}(0.2839) = 73.5^\circ$ معكوسُ جيبِ التمامِ، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوةُ 2: تطبيقُ قانونِ المساحةِ.

$K = \frac{1}{2}ac\sin B$ قانونُ مساحةِ المثلثِ

$= \frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times \sin 73.5^\circ$ بالتعويضِ

$= 3288.8\ km^2$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

التخزينُ في ذاكرةِ الآلةِ الحاسبةِ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ B في هذا السؤالِ، ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ (بالترتيبِ منَ اليسارِ): SHIFT → RCL → B فتُحفَظُ الزاويةُ في الذاكرةِ. ولاستعمالِها في حسابِ مساحةِ المثلثِ، أُدخِلُ: $\frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times$ ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ: sin → ALPHA → B → = ، فتظهرُ النتيجةُ: 3288.8

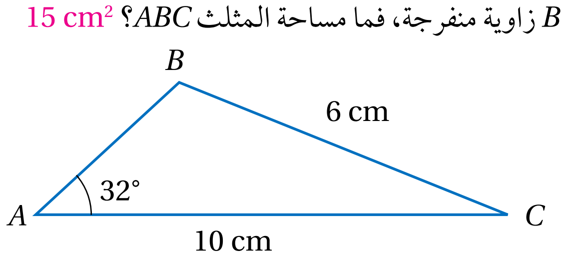
أتحقق من فهمي

قطعةُ رخامٍ مثلثةُ الشكلِ، أبعادُها: 50 cm، وَ 85 cm، وَ 70 cm. ما مساحتُها؟ انظر الهامش.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة في اختيار الصيغة الصحيحة لحساب مساحة المثلث عندما يعطى منه طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما كما في السؤال الآتي:

إذا كانت B زاوية منفرجة، فما مساحة المثلث ABC؟ $15\ cm^2$



ذكِّر الطلبة بضرورة إيجاد قياس الزاوية C لحساب مساحة هذا المثلث.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 المثلثُ ABC الذي فيهِ $BC = 7$ cm ، $AC = 8$ cm ، وَ قياسُ الزاويةِ ACB فيهِ $59°$. 24.0 cm^2

2 المثلثُ ABC الذي قياسُ الزاويةِ BAC فيهِ $85°$ ، $AC = 6.7$ cm ، وَ $AB = 8$ cm . 26.7 cm^2

3 المثلثُ PQR الذي فيهِ $QR = 27$ cm ، $PR = 19$ cm ، وَ قياسُ الزاويةِ QRP فيهِ $109°$. 242.5 cm^2

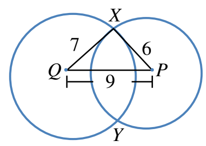
4 المثلثُ XYZ الذي فيهِ $XY = 231$ cm ، $XZ = 191$ cm ، وَ قياسُ الزاويةِ YXZ فيهِ $73°$. 21096.6 cm^2

5 المثلثُ LMN الذي فيهِ $LN = 63$ cm ، $LM = 39$ cm ، وَ قياسُ الزاويةِ NLM فيهِ $85°$. 1223.8 cm^2

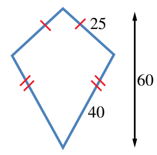
6 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ ABC هيَ 27 cm^2 ، $BC = 14$ cm ، وَ قياسُ الزاويةِ BCA فيهِ $115°$، فما طولُ AC؟ 4.26 cm

7 إذا كانَتْ مســاحةُ المثلثِ LMN هيَ 133 cm^2 ، $LM = 16$ cm ، وَ $MN = 21$ cm ، والزاويةُ LMN حادَّةً، فما قياسُ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ: LMN ، وَ MNL؟ 52.3°, 48.5°

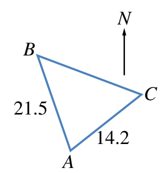
9 لوحةٌ على شكلِ مثلثٍ، أطوالُ أضلاعِهِ: 60 cm ، وَ 70 cm، وَ 80 cm. أَجِدُ مساحةَ اللوحةِ. 2033 cm^2



10 دائرتـــانِ، مركزُ إحداهُما P ومركزُ الأُخـــرى Q ، وطولُ نصفِ قُطْرِ إحداهُما 6 cm والأخرى 7 cm. إذا تقاطعَتا في النقطتيْنِ X وَ Y، وكانَ $PQ = 9$ cm، فما مســـاحةُ المثلثِ PXQ؟ 21.0 cm^2



11 **طائرةٌ ورقيةٌ:** صنعَ ســليمٌ طائرةً ورقيةً كما في الشــكلِ المجاورِ. أَجِدُ مســاحةَ المادةِ اللازمةِ لصنعِ الطائرةِ بالوحداتِ المربعةِ. 726.2



12 **مُتنزَّهٌ وطنيٌّ:** يرادُ إنشـــاءُ مُتنـــزَّهٍ وطنيٍّ على قطعةِ أرضٍ مثلثةِ الشـــكلِ ABC . إذا كانَتِ النقطــةُ B في اتجاهِ $324°$ منَ النقطةِ A ، والنقطةُ C فـــي اتجاهِ $042°$ منَ النقطةِ A ، فما مساحةُ المُتنزَّهِ بالوحداتِ المربعةِ؟ 149.3

134

إرشاد:

- في السؤال 11، وجِّه الطلبة إلى رســـم خط الشمال المار بالنقطة A، ثم إيجاد جزأي الزاوية BAC وجمعهما؛ لإيجـــاد قياس الزاوية BAC، ثم استعمال قانون إيجاد مساحة المثلث.
- فـــي الســـؤال 18، وجِّه الطلبة إلـــى إيجاد طول ضلع آخـــر في المثلث باستعمال قانون الجيوب.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســـئلة في بند (**أتدرب وأحل المســـائل**)، ثم اطلـــب إليهم حلها (يمكـــن الطلب إليهم حـــل الأســـئلة ذوات الأرقـــام الزوجية ضمن مجموعات).
- إذا واجـــه بعض الطلبـــة صعوبة في حل أي مســـألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

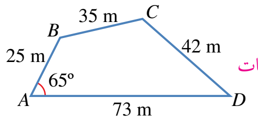
مهارات التفكير العليا

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية غير متجانسة، بحيث تضم طلبة من ذوي المســـتوى فوق المتوسط، وآخرين من ذوي المستوى دون المتوسط.
- اطلب إلى أفراد المجموعات حل الأسئلة، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المســـائل الواردة في الصفحة 26 من كتـــاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المســـائل التي يمكنهم حلهـــا في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

حقولٌ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ أبعادَ حقلٍ رباعيِّ الأضلاعِ:



13 أُثبِتُ أنَّ طولَ BD هوَ 66 m ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ مترٍ. انظر ملحق الإجابات

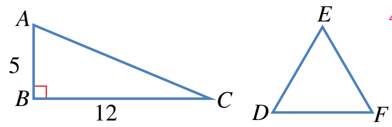
14 أجِدُ قياسَ الزاويةِ C. 118.9°

15 أحسُبُ مساحةَ الحقلِ. 1470 cm^2

16 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. 397.5 kg

17 المثلثُ ABC قائمُ الزاويةِ، والمثلثُ DEF مُتطابِقُ الأضلاعِ وللمثلثيْنِ المحيطُ نفسُهُ. أجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF.

43.3 cm^2



18 **جغرافيا:** برمودا منطقةٌ مثلثةُ الشكلِ، تقعُ في الجزءِ الغربيِّ منَ المحيطِ الأطلسيِّ، رؤوسُها مدينةُ ميامي، وبرمودا، وسان خوان. وقدْ شهِدَ مثلثُ برمودا وقوعَ عددٍ منْ حوادثِ اختفاءِ السفنِ والطائراتِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ ميامي وسان خوان 1674 km تقريبًا، وبينَ ميامي وبرمودا نحوَ 1645 km، وبينَ سان خوان وبرمودا قرابةَ 1544 km، فما مساحةُ مثلثِ برمودا منْ دونِ اعتبارٍ لتقوُّسِ الأرضِ؟ 1133530 km^2

مهارات التفكير العليا

19 **تحدٍّ:** أجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC الذي قياسُ الزاويةِ A فيهِ 70°، وقياسُ الزاويةِ B فيهِ 60°، وطولُ الضلعِ AB فيهِ 4 cm. 8.5 cm^2

20 **أكتشفُ الخطأَ:** ABC مثلثٌ فيهِ $BC = 8cm$، $AB = 9cm$، وقياسُ الزاويةِ A فيهِ 30° . أرادَتْ نورُ إيجادَ مساحتِهِ إلى أقربِ عُشْرٍ، فكانَ حَلُّها كما يأتي: انظر ملحق الإجابات

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30^\circ$$
$$= 18 \text{ cm}^2$$

أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ نورَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

5 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط رسم مثلث عُلِمت أطوال أضلاعه الثلاثة، ثم إيجاد مساحته.
- وجِّه الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط إلى البحث عن قطعة مثلثة الشكل من بيئتهم (لوحة، وجزء من حائط، وقطعة قماش مثلًا)، ثم إيجاد مساحتها التقريبية، ثم كتابة تقرير عن ذلك، وتضمينه صورًا للقطعة المثلثة الشكل، والخطوات المتبعة في حل السؤال.

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أن عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

6 الختام

- اطلب إلى كل طالب– اطلب إلى الطلبة أن يرسموا في ورقةٍ مثلثًا عُلِمت ثلاثة من عناصره، مراعين خصائص المثلثات التي تعلموها في صفوف سابقة (لضمان منطقية السؤال).
- أن يتبادل ورقته مع زميله في المقعد، ثم يجد مساحة هذا المثلث في 5 دقائق.
- اجمع أوراق الطلبة، ثم قدِّم التغذية الراجعة لهم.

حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ
Solving Problems in Three Dimensions

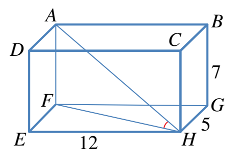
فكرةُ الدرسِ إيجادُ أطوالٍ وقياساتٍ لزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس والنسبِ المثلثيةِ.

مسألةُ اليومِ شُيِّدَ الهرمُ الأكبرُ في مدينةِ الجيزةِ بمصرَ عامَ 2500 قبلَ الميلادِ، وتُمثِّلُ قاعدتُـهُ مربَّعًا طولُ ضلعِهِ 232.6 m، وطـولُ الضلعِ الواصلِ بينَ قمَّةِ الهرمِ وأيٍّ منْ رؤوسِ المربَّعِ 221.2 m. أجِدُ ارتفاعَ هذا الهرمِ.

تشـتملُ المسـائلُ ثلاثيةُ الأبعادِ (في الفضاءِ) على ثلاثةِ مسـتوياتٍ؛ أفقيٍّ، ورأسيٍّ، ومائلٍ. ويتطلَّبُ حَلُّ هذهِ المسـائلِ رسمَ مُخطَّطٍ يُوضِّحُ المسألةَ، ويُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ فيها، ثمَّ البحثَ عنْ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ فيها. وإذا لمْ توجدْ هذهِ المثلثاتُ، فإنَّنا نرسـمُ بعضَها، بحيثُ تكونُ بعضُ عناصرِها معلومةً، فضلًا عنْ تحديدِ العنصرِ المطلوبِ إيجادُهُ فيها؛ على أنْ نرسمَ كلًّا منها بمنأى عنِ المُخطَّطِ المذكورِ آنفًا، ليسهلَ علينا معرفةُ العلاقةِ التي نستخدمُها في الحَلِّ.

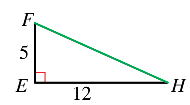
مثال 1

يُمثِّـلُ الشـكلُ المجـاورُ متـوازي مسـتطيلاتٍ. أَجِـدُ قيـاسَ الزاويـةِ AHF، مُقرِّبًـا إجابتـي إلـى أقـربِ منزلـةٍ عشـريةٍ واحـدةٍ.



المثلثُ AFH قائمُ الزاويةِ فـي F، ومعلومٌ فيهِ طولُ AF؛ لذا يجبُ معرفةُ عنصرٍ آخرَ لإيجادِ القياسِ المطلوبِ.

الخطوةُ 1: إيجادُ طولِ FH منَ المثلثِ قائمِ الزاويةِ FEH؛ المرسومِ وحدَهُ جانبًا.



$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$	نظريةُ فيثاغورس
$= 5^2 + 12^2$	بالتعويضِ
$(FH)^2 = 169$	بالتبسيطِ
$FH = \sqrt{169} = 13$	بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

136

المفاهيم العابرة:

- أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابـرة حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. فبعد الانتهاء من حل (مسـألة اليوم)، عـزِّز لديهم الوعي بالقضايا الإنسـانية (الحضارات والإرث العمراني العالمي)، بتنظيم حوار معهم عن الأهرامات، ثم طرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - « أيُّكم يعرف عجائب الدنيا السبع القديمة؟
  - « ما عجائب الدنيا السبع الحديثة؟
  - « هل توجد الأهرامات فقط في مصر؟
  - « مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- وجِّـه مجموعة من الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت عن عجائب الدنيا السـبع القديمة والحديثة، ثـم اطلب إلى مجموعة أخـرى البحث عن دول العالم التي فيهـا أهرامات، ثم اطلب إلى كل مجموعـة عرض نتائجها أمام الزملاء في الصف.

نتاجات الدرس

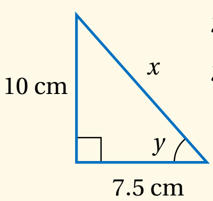
- يسـتعمل النسـب المثلثيـة ونظرية فيثاغـورس لإيجاد أطـوال مجهولة في مسـائل ثلاثيـة الأبعاد.
- يحسب الزاوية بين مستقيم ومستوى.
- يحل مسائل حياتية ثلاثية الأبعاد.

التعلم القبلي:

- حل المثلث قائم الزاوية.
- اسـتعمال النسـب المثلثية ونظرية فيثاغورس لحل مسـائل ثنائية الأبعاد تتضمَّن حساب مسافات وزوايا مجهولة.

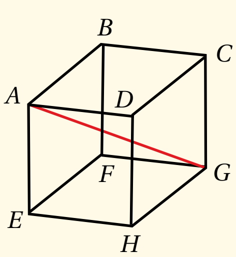
1 التهيئة

- راجع الطلبة في حل المثلث قائم الزاوية.
- ارسـم المثلـث قائـم الزاوية المجاور، ثم اطلـب إلى الطلبة إيجاد قيمة كلٍّ من x، و y .



$x = 12.5$ cm; $y \approx 53.1°$

- وضِّـح للطلبة مفهـوم قُطْـر المكعـب أو متوازي المستطيلات، ثم اطلب إليهم بيان كيفية إيجاد طوله.
- $\overline{AG}$ قُطْـر في متوازي المسـتطيلات المجاور، سَـمِّ أقطاره الأخرى.
- وضِّح للطلبة مفهوم الزاوية بين مستقيم ومستوى.
- في الشـكل المجاور، مسقط $\overline{AG}$ على قاعدة متوازي المسـتطيلات هو $\overline{EG}$ ، والزاوية بيـن $\overline{AG}$ والقاعدة $EFGH$ هي الزاوية AGE.



2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) واسألهم:
  - » ما الهرم؟ الهرم: مجسم قاعدته مضلع، وأوجهه الجانبية مثلثات متطابقة الضلعين، تتلاقى في نقطة واحدة، هي رأس الهرم.
  - » ما ارتفاعه؟ ارتفاع الهرم: طول العمود النازل من رأس الهرم إلى قاعدته.
  - » إذا كانت قاعدة الهرم مُربَّعًا أو مستطيلًا، ورُسِم عمود من رأس الهرم إلى القاعدة، فأين يلتقي هذا العمود بالقاعدة؟ يلتقيها في مركزها الذي يُمثِّل نقطة تقاطع قُطْريها، أو منتصف قُطْريها.
  - » كيف يمكن إيجاد ارتفاع الهرم؟ بتطبيق نظرية فيثاغورس على مثلث قائم الزاوية، أحد أضلاعه ارتفاع الهرم.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

إرشادات للمعلم

- أحضِر نماذج لمجسمات، مثل: المكعب، ومتوازي المستطيلات، والمنشور، والهرم، ونماذج مصنوعة من عيدان خشبية؛ ليتخيَّل الطلبة قُطْر المكعب ومتوازي المستطيلات، والزاوية بين مستقيم ومستوى.
- ذكِّر الطلبة بنظرية فيثاغورس، وتعريف النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية.
- اطلب إلى الطلبة التأشير على المطلوب في المسألة، وشجِّعهم على رسم مثلث منفصل؛ لمساعدتهم على الحل في كل خطوة من خطوات حل المسألة.

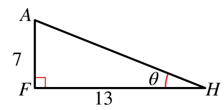
3 التدريس

- أخبر الطلبة أن هذا الدرس يُوضِّح كيفية استعمال حساب المثلثات لإيجاد أطوال وزوايا مجهولة في مسائل حياتية ثلاثية الأبعاد.
- ناقِش الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد زاوية في شكل ثلاثي الأبعاد، مُوضِّحًا كل خطوة من خطوات الحل. يُفضَّل توفير مجسم لمتوازي مستطيلات يرجع إليه الطلبة، ويمكن استعمال غرفة الصف بوصفها تُمثِّل متوازي مستطيلات.
- أكِّد للطلبة أهمية رسم مخططات واضحة، مكتوب عليها القياسات المعلومة، ورموز القياسات المجهولة.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال.
- تابع الطلبة في هذه الأثناء، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

ملاحظات المعلم



الخطوةُ 2: رسمُ المثلثِ AFH وحدَهُ، ثمَّ استعمالُ الظلِّ (tan) لإيجادِ قياسِ الزاويةِ AHF.

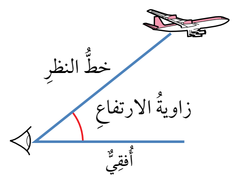
$$\tan\theta = \frac{7}{13} = 0.5384$$

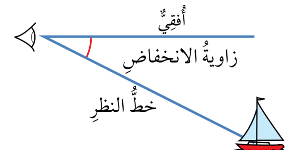
$$\theta = \tan^{-1}(0.5384) = 28.3^\circ$$ بالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ BE، وقياسَ الزاويةِ EBG في المثالِ السابقِ. انظر الهامش.

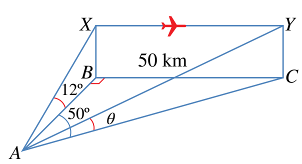
عندما أنظرُ إلى طائرةٍ في السماءِ، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والطائرةِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمّى **زاويةَ الارتفاعِ**. وإذا وقفْتُ على تَلَّةٍ ساحليةٍ، ثمَّ نظرْتُ إلى قاربٍ أسفلَ منّي، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والقاربِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمّى **زاويةَ الانخفاضِ**. ولهاتيْنِ الزاويتيْنِ أهميةٌ كبيرةٌ عندَ حَلِّ المسائلِ الحياتيةِ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.





مثال 2: من الحياة

تقعُ النقاطُ A، وَ B، وَ C في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ على الأرضِ، وتقعُ النقطةُ C على بُعْدِ 50 km شرقيَّ النقطةِ B التي تقعُ شماليَّ النقطةِ A، وتقعُ النقطةُ C في اتجاهِ 050° منَ النقطةِ A. رُصِدَتْ منَ النقطةِ A حركةُ طائرةٍ في موقعيْنِ مختلفيْنِ على الارتفاعِ نفسِهِ عنِ الأرضِ؛ الأولِ: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ B مباشرةً، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 12°. والثاني: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C. أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C.

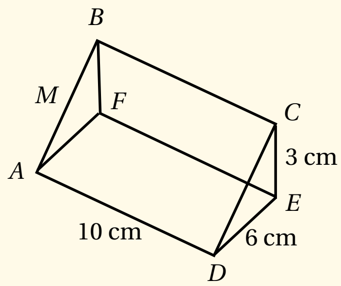


الخطوةُ 1: أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ.

الخطوةُ 2: أرسمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ AB، وَ AC.

مثال إضافي

- جد قياس الزاوية CAE في الشكل الآتي. 14.4°



مثال 2: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حل المثال 2 بالطريقة المفصلة في المثال 1.

أخطاء مفاهيمية:

قد يتعذَّر على بعض الطلبة تحديد المثلث قائم الزاوية الذي استعملوه لبدء الحل؛ لذا أكِّد لهم ضرورة تحديد المثلث الذي يحوي العنصر المطلوب أولًا، ثم الانتقال إلى المثلث المُرتبِط بهذا المثلث، الذي عُلِم منه طولا ضلعين، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين؛ ما يساعدهم على إيجاد عناصر المثلث الذي يحوي العنصر المطلوب.

إرشادات:

- قُطْر المكعب أو متوازي المستطيلات هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين متقابلين من وجهين متقابلين في المجسم.
- الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية المحصورة بين المستقيم ومسقطه العمودي على ذلك المستوى.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

$EB = 14.8\text{ cm}\ ;\ m\angle EBG = 61.7^\circ$

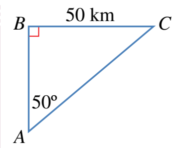
مثال 3: من الحياة

- ناقِش الطلبة فـي حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد طول مجهول في مسألة ثلاثية الأبعاد.

مثال إضافي

- يقع برج الإرسال التلفزيوني XY على بُعْد 3 km إلى الشـرق من القرية A، وتقع القرية B على بُعْد 2 km جنوبي القرية A. إذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة البرج من B هو $6°$، فما ارتفاع البرج؟ 379 m

---

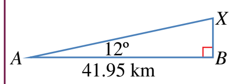


$\tan 50° = \dfrac{50}{AB}$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$AB = \dfrac{50}{\tan 50°} = 41.95$ km باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$\sin 50° = \dfrac{50}{AC}$ تعريفُ جيبِ الزاويةِ

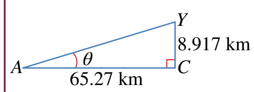
$AC = \dfrac{50}{\sin 50°} = 65.27$ km باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ



الخطوةُ 3: أرسـمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABX، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ BX، ومنْهُ يُمكِنُ إيجادُ CY، فهما متساويانِ؛ لأنَّ الشكلَ $BXYC$ مستطيلٌ.

$\tan 12° = \dfrac{BX}{41.95}$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$BX = 41.95 \tan 12° = 8.917$ km باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ



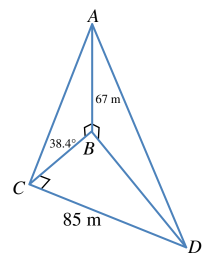
الخطوةُ 4: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ACY لإيجادِ زاويةِ الارتفاعِ θ.

$\tan \theta = \dfrac{8.917}{65.27} = 0.1366$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8°$ معكوسُ الظلِّ

إذنْ، زاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C هيَ: $7.8°$، مُقرَّبةً إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

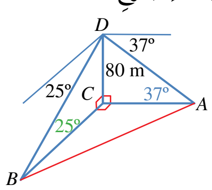
أتحقق من فهمي



رصدَ أحمدُ قمَّةَ مئذنةٍ منْ نقطةٍ على الأرضِ تقعُ جنوبَ المئذنةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 38.4°، ثمَّ سارَ شرقًا مسافةَ 85 m، ورصدَ قمَّةَ المئذنةِ مرَّةً أُخرى. إذا كانَ ارتفاعُ المئذنةِ 67 m، أجِدْ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المئذنةِ في المرَّةِ الثانيةِ. انظر ملحق الإجابات

مثال 3: من الحياة

رُصِـدَ المنـزلُ A فـي اتجـاهِ الشـرقِ مـنْ قمَّـةِ بـرجٍ يرتفـعُ 80 m، وكذلـكَ المنـزلُ B فـي اتجـاهِ الجنـوبِ. إذا كانَـتْ زاويـةُ انخفـاضِ المنـزلِ A مـنْ قمَّـةِ البـرجِ 37°، وزاويـةُ انخفاضِ المنزلِ B منْ قمَّتِهِ 25°، فما المسافةُ بينَ المنزلَيْنِ؟

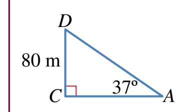


الخطوةُ 1: أرسـمُ مُخطَّطًا، علمًا بأنَّ البرجَ DC يَصنعُ زاويةً قائمـةً مـعَ الأرضِ، وأنَّ اتجاهَ كلٍّ منَ الشـرقِ والجنوبِ يَصنعانِ معًا زاويةً قائمةً.

بما أنَّ زاويةَ انخفاضِ المنزلِ A هيَ 37°، فإنَّ الزاويةَ DAC هيَ 37°، وبما أنَّ زاويةَ انخفاضِ المنزلِ B هيَ 25°، فإنَّ الزاويةَ DBC هيَ 25° .

الخطوةُ 2: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC لإيجادِ AB، وهذا يُحتِّمُ معرفةَ AC، وَ BC.

الخطوةُ 3: أرسمُ المثلثَ ADC . ولإيجادِ AC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ 37°.

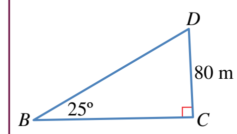


$$\tan 37^\circ = \frac{80}{AC} \quad \text{تعريفُ ظلِّ الزاويةِ}$$

$$AC = \frac{80}{\tan 37^\circ} \quad \text{بالتبسيطِ}$$

$$AC = 106.2 \text{ m} \quad \text{باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ}$$

الخطوةُ 4: أرسمُ المثلثَ BCD. ولإيجادِ BC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ 25°.

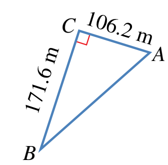


$$\tan 25^\circ = \frac{80}{BC} \quad \text{تعريفُ ظلِّ الزاويةِ}$$

$$BC = \frac{80}{\tan 25^\circ} \quad \text{بالتبسيطِ}$$

$$BC = 171.6 \text{ m} \quad \text{باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ}$$

الخطوةُ 5: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس في المثلثِ ACB لإيجادِ AB.



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \quad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

$$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725 \quad \text{بالتعويضِ}$$

$$AB = \sqrt{40725} = 201.8 \quad \text{بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ}$$

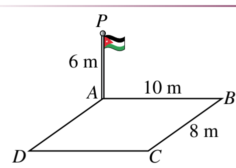
إذنْ، المسافةُ بينَ المنزليْنِ هيَ: 201.8 m، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أتحقق من فهمي

أبحرَتِ السفينتانِ A وَ B منَ الميناءِ P في اتجاهيْنِ مُتعامِديْنِ. وقدْ رصدَتْ طائرةٌ عموديةٌ تُحلِّقُ فوقَ الميناءِ هاتيْنِ السفينتيْنِ في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 40°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 54°. إذا كانَ ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ 600 m، فما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ لحظةَ رصدِهِما؟ انظر ملحق الإجابات

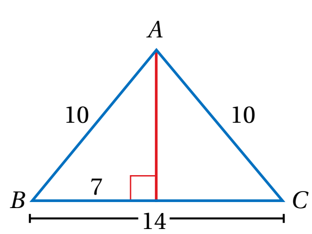
أتدرب وأحل المسائل

1 **ساريةُ العَلَمِ:** نُصِبَتْ ساريةُ عَلَمٍ عموديًّا عندَ رُكنِ ساحةٍ مستطيلةِ الشكلِ $ABCD$. أجِدْ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ P منَ النقطةِ C. 25.1°



إرشاد:

- لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مخطط معطى، يجب البحث عن مثلث قائم الزاوية، تكون الزاوية المطلوبة إحدى زاويتيه الحادتين. وإذا لم يكن المثلث موجودًا، فإنه يُرسَم بإنزال عمود من نقطة معلومة على أحد الضلعين إلى الضلع الآخر.
- تُستعمَل النسب المثلثية لحساب الزاوية. فمثلًا، لإيجاد قياس الزاوية B في المثلث ABC المتطابق الضلعين المُبيَّن جانبًا، يُرسَم عمود من الرأس A إلى الضلع $\overline{BC}$ ، فيُنصِّفه، فيكون قياس B هو: $\cos^{-1}\frac{7}{10} = 45.6^\circ$.



4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح (يمكنك رسم تمثيلات تقريبية حيث يلزم ذلك).
- ركِّز على معالجة الأخطاء المفاهيمية، أو الأخطاء المُتعلِّقة بمهارات حل المعادلات المثلثية.

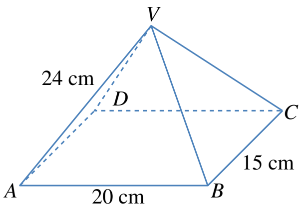
مهارات التفكير العليا

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية غير متجانسة، بحيث تضم طلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط، وآخرين من ذوي المستوى دون المتوسط.
- اطلب إلى أفراد المجموعات حل الأسئلة، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 27 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ هرمًا قاعدتُهُ $ABCD$ مستطيلةُ الشكلِ، بُعْداها: **20 cm**، وَ **15 cm**. إذا كانَ طولُ كلٍّ منَ الأحرفِ الواصلةِ بينَ قمَّةِ الهرمِ ورؤوسِ القاعدةِ **24 cm**، وكانتِ القمَّةُ V تقعُ رأسيًّا فوقَ مركزِ القاعدةِ المستطيلةِ، فأَجِدْ:

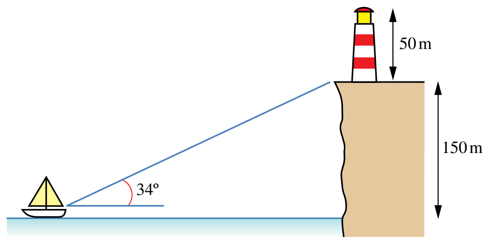


2 طولَ القُطْرِ AC. 25 cm

3 قياسَ الزاويةِ VAC. 58.6°

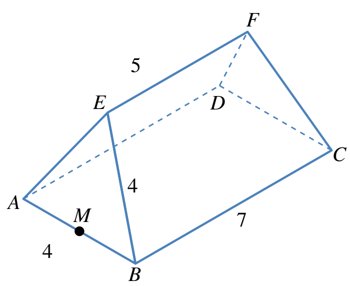
4 ارتفاعَ الهرمِ. 20.5 cm

5 **منارةٌ:** شاهدَ صيّادٌ منْ قاربِهِ قاعدةَ مَنارةٍ على حافةٍ صخريةٍ بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُها 34°. إذا كانَ ارتفاعُ قاعدةِ المَنارةِ عنْ مستوى عينَيِ الصيّادِ 150 m، فكمْ يبعدُ الصيّادُ عنْ هذهِ القاعدةِ؟ 222.4 m



6 إذا كانَ ارتفاعُ المَنارةِ 50 m، فما زاويةُ ارتفاعِ نظرِ الصيّادِ نحوَ قمَّةِ المَنارةِ؟ 42.0°

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سقفَ بنايةٍ، قاعدتُهُ المستطيلُ الأفقيُّ $ABCD$ الذي بُعْداه: **7 m**، وَ **4 m**. وتُمثِّلُ نهايتا السقفِ مثلثيْنِ متطابقَيِ الأضلاعِ، في حينِ يُمثِّلُ كلٌّ منْ جانبَيِ السقفِ شبهَ منحرفٍ متطابقَ الساقيْنِ. إذا كانَ طولُ الحافةِ العلويةِ EF هوَ **5 m**، فأَجِدْ:

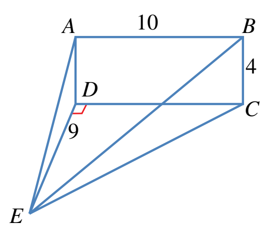


7 طولَ EM، حيثُ M نقطةُ منتصفِ AB. 3.46 m

8 قياسَ الزاويةِ EBC. انظر ملحق الإجابات

9 قياسَ الزاويةِ بينَ EM والقاعدةِ $ABCD$. انظر ملحق الإجابات

$ABCD$ مستطيلٌ رأسيٌّ، وَ EDC مثلثٌ أفقيٌّ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CDE هوَ 90°، وَ $AB = 10$ cm، وَ $BC = 4$ cm، وَ $ED = 9$ cm، فأَجِدْ:



10 قياسَ الزاويةِ AED. 24.0°

11 قياسَ الزاويةِ DEC. 48.0°

12 طولَ $\overline{EC}$. 13.5 cm

13 قياسَ الزاويةِ BEC. 16.6°

تنويع التعليم:

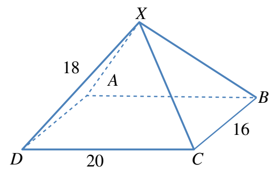
- اطلب إلى الطلبة كتابة فقرة عن المثال الذي وجدوه أكثر صعوبة، وتحدّى قدراتهم بدرجة كبيرة، وبيان سبب ذلك، ثم كتابة ما يجول في أذهانهم من أسئلة واستفسارات عن موضوع الدرس.

إرشاد:

- لإيجاد الزاوية بين $\overline{EM}$ والقاعدة $ABCD$ في السؤال 9، يُنزَّل عمود من النقطة E إلى القاعدة، فيلتقيها في النقطة G، فتكون الزاوية EMG هي الزاوية المطلوبة.
- اطلب إلى الطلبة كتابة الخطوات التي يتبعونها في حل مسائل ثلاثية الأبعاد، مُبيِّنين كيفية تطبيقها في حل السؤال 14

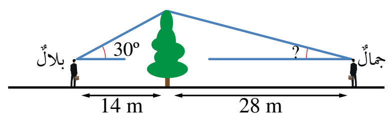
14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ الهرمَ $XABCD$ الذي لهُ قاعدةٌ مستطيلةُ الشكلِ.
أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقُطْرِ القاعدةِ DB. 44.6°

15 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

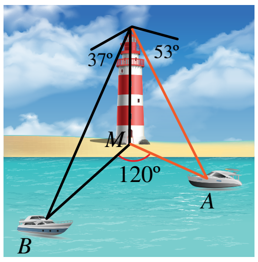


مهارات التفكير العليا

16 **أكتشفُ الخطأَ:** يقفُ بلالٌ على بُعْدِ 14 m شرقيَّ شجرةٍ، زاويةُ ارتفاعِ قمَّتِها بالنسبةِ إليْهِ 30°، ويقفُ جمالٌ على بُعْدِ 28 m غربيَّ الشجرةِ، وهوَ يرى أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الشجرةِ بالنسبةِ إليْهِ يجبُ أنْ تكونَ 15°؛ لأنَّهُ يبعدُ عنِ الشجرةِ مِثْلَي المسافةِ التي يبعدُها بلالٌ. هلْ رأيُ جمالٍ صحيحٌ؟ إذا لمْ يكنْ رأيُهُ صحيحًا، فما زاويةُ الارتفاعِ؟
انظر ملحق الإجابات

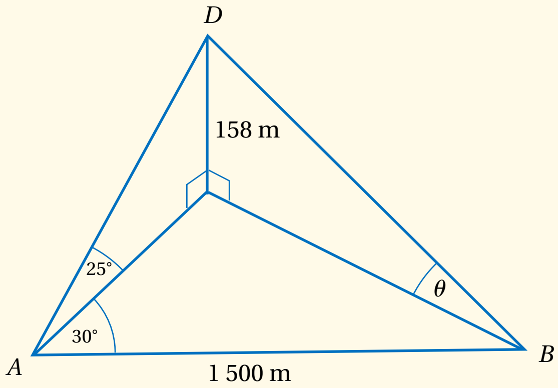


17 **تحدٍّ:** رُصِدَ القاربانِ A وَ B في البحرِ منْ قمَّةِ مَنارةٍ على الشاطئِ، ارتفاعُها 44 m، في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ A هيَ 53°، وزاويةُ انخفاضِ القاربِ B هيَ 37°، وقياسُ الزاويةِ AMB هوَ 120°، حيثُ M قاعدةُ المَنارةِ. أَجِدُ المسافةَ بينَ القاربيْنِ. انظر ملحق الإجابات



5 الإثراء

- استعمل القياسات المبينة على الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي:



- « AC 338.8 m
- « BC 1218.4 m
- « قيمة θ. 7.4°
- « قياس الزاوية ADB 130.8°

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أن عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

المفاهيم العابرة:

أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة حيثما وردت في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين. ففي أثناء حل الأسئلة، وجِّههم إلى اتباع الخطوات المنطقية المتسلسلة في الحل، وكتابة تبريراتهم لكل خطوة، وكيفية توصُّلهم إلى الإجابة؛ ما يُعزِّز لديهم المهارات الحياتية، ومهارات التفكير، مثل: التحليل والربط والتفسير، وتقديم الأدلة والبراهين.

6 الختام

بطاقة الخروج.

وزِّع على الطلبة أوراقًا ملونة، ثم اطلب إلى كلٍّ منهم أن يكتب في الورقة ذات اللون الأخضر مثلًا أكثر سؤال أتقن حله في هذا الدرس، ثم يكتب في الورقة ذات اللون الأزرق مثلًا موضوعًا يحتاج إلى مزيد من التدرُّب عليه.

التقويم الختامي:

- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأسئلة: 35 ،34 ،33 وردت ضمن أسئلة الاختبارات الدولية، أو وردت مسائل مشابهة لها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

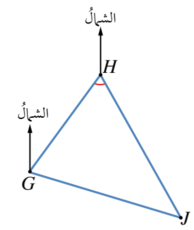
1) يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ زواياهُ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ.
b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.
c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا.
d) لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

2) يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ أضلاعِهِ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ.
b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.
c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا.
d) لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

3) إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ H منَ النقطةِ G في الشكلِ الآتي هوَ 045°، واتجاهُ النقطةِ J منَ النقطةِ H هوَ 164°، فإنَّ قياسَ الزاويةِ GHJ هوَ:



a) 16° b) 045°
c) 29° d) 61°

4) إحدى الصيغِ الآتيةِ تُستعمَلُ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ ABC:

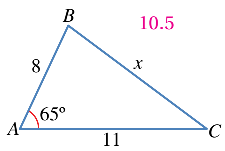
a) $\frac{1}{2}bc\sin C$ b) $\frac{1}{2}ab\sin C$
c) $\frac{1}{2}ab\sin A$ d) $\frac{1}{2}ab\sin B$

5) إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ Z هوَ 070°، فإنَّ اتجاهَ النقطةِ Z منَ النقطةِ R هوَ:

a) 070° b) 110°
c) 250° d) 290°

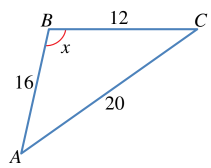
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

6)



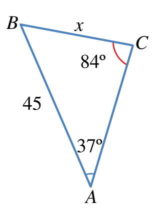
10.5

7)



90°

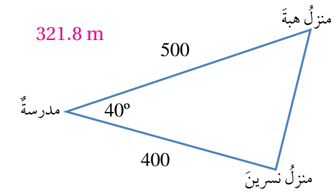
8)



27.2

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

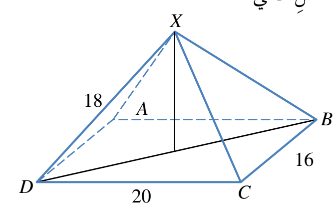
9 يبعدُ منزلُ نسرينَ عنِ المدرسةِ مسافةَ 400 m، ويبعدُ منزلُ هبةَ عنِ المدرسةِ نفسِها مسافةَ 500 m، كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ المسافةَ بينَ منزليْهِما.



321.8 m

10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقاعدةِ الهرمِ في الشكلِ الآتي.

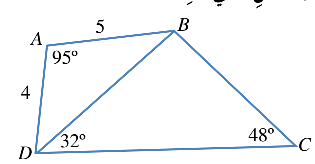
44.6°



11 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ PQR هيَ $68\ cm^2$، وكانَ $PQ = 18\ cm, RQ = 15\ cm$، فما قياسُ الزاويةِ الحادَّةِ PQR؟

30.2°

مستعينًا بالشكلِ الآتي، أَجِدُ:



12 طولَ $\overline{DB}$. 6.67 cm

13 قياسَ الزاويةِ DBC . 100°

14 طولَ $\overline{CD}$. 8.84

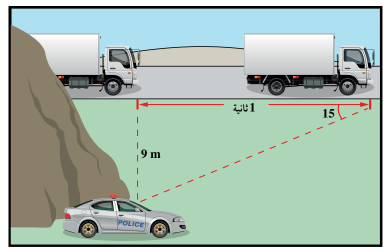
15 مساحةَ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$. 25.6 cm²

16 **موانئُ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P باتجاهِ الغربِ مسافةَ 16 km، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ الجنوبِ، وقطعَتْ مسافةَ 9 km حتّى وصلَتِ الميناءَ S. أَجِدُ اتجاهَ الميناءِ S منَ الميناءِ P.

240.6°

17 **رادارٌ:** رَصدَ رادارٌ شاحنةً بعدَ ثانيةٍ منْ مرورِها بمحاذاتِهِ، فصنعَ الخطُّ الواصلُ بينَ الرادارِ والشاحنةِ وحافةِ الطريقِ زاويةً مقدارُها 15° كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ سرعةَ الشاحنةِ بوحدةِ km/h.

120.9 km/h



18 **عواصفُ بحريةٌ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A بسرعةِ 28 km/h مُتوجِّهةً إلى الميناءِ B على بُعْدِ 1100 km شرقَ الميناءِ A. ولتجنُّبِ العواصفِ الشديدةِ التي هبَّتْ عندَ انطلاقِ السفينةِ؛ فقدْ سلكَ القبطانُ مسارًا ينحرفُ 20° جنوبًا عنْ خطِّ الملاحةِ المباشرِ بينَ الميناءيْنِ حتّى هدأَتِ العواصفُ بعدَ إبحارٍ استمرَّ 10 ساعاتٍ. كمْ تبعدُ السفينةُ عنِ الميناءِ B بعدَ هذهِ المدَّةِ منَ الإبحارِ؟ ما قياسُ الزاويةِ الذي سيجعلُ السفينةَ تتوجَّهُ مباشرةً إلى الميناءِ B؟

842.3 km ; 26.5°

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

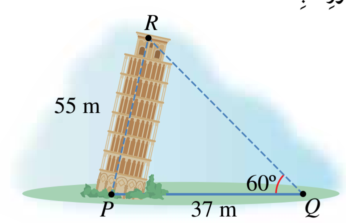
يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية – وفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعيَّن عليك – عزيزي المعلِّم– تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

برجُ بيزا: طولُ برجِ بيزا المائلِ نحوَ 55 m، وزاويةُ ارتفاعِ أعلى البرجِ منْ نقطةٍ على بُعْدِ 37 m هيَ 60° كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ:

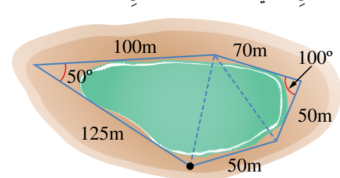


19 قياسَ الزاويةِ RPQ. 84.4°

20 ارتفاعَ قمَّةِ البرجِ R عنِ الأرضِ. 54.73 m

21 **ملاحةٌ بحريةٌ:** انطلقَ قاربٌ منَ النقطةِ A منَ الميناءِ نحوَ سفينةٍ مُتوقِّفةٍ في عُرْضِ البحرِ باتجاهِ 030°، وتبعدُ مسافةَ 2 km عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، ثمَّ تحرَّكَ القاربُ إلى النقطةِ B التي تقعُ باتجاهِ 000° عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، وكانَتِ المسافةُ بينَهُما 3 km. أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ النقطةِ B. 1.6 km

22 **زراعةٌ:** لتقديرِ مساحةِ حقلٍ منَ القمحِ، رسمَ خالدٌ مُضلَّعًا خماسيًّا حولَهُ، ثمَّ حدَّدَ قياساتِهِ المُبيَّنةَ في الشكلِ الآتي. ما مساحةُ الحقلِ التقريبيةُ؟ $8675.7\ m^2$



23 **ملاحةٌ بحريةٌ:** تبعدُ سفينةٌ عنْ قاعدةِ مَنارةٍ مسافةَ 80 km، وقدْ رصدَ قبطانُ السفينةِ قمَّةَ المَنارةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 60°، ثمَّ سارَتِ السفينةُ بخطٍّ مستقيمٍ في اتجاهِ الشرقِ، فوجدَ أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المَنارةِ هيَ 45°. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَتْها السفينةُ. 58.6 km

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

ركب شخصٌ طائرةً عموديةً ترتفعُ 700 m عنْ سطحِ البحرِ، فشاهدَ السفينتيْنِ A وَ B. إذا كانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 45°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 40°، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 24، 25، 26.

24 اعتمادًا على زوايا الانخفاضِ، أختارُ العبارةَ الصحيحةَ:

a) موقعُ السفينةِ A بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ B.

b) موقعُ السفينةِ B بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ A.

c) بُعْدُ السفينتيْنِ عنِ الطائرةِ متساوٍ.

d) لا يُمكِنُ معرفةُ أيُّ السفينتيْنِ أبعدُ منْ زوايا الانخفاضِ.

25 المسافةُ بينَ السفينتيْنِ A وَ B مُقرَّبةً إلى أقربِ مترٍ هيَ:

a) 134   b) 700

c) 834   d) 1534

26 أُوضِّحُ كيفَ أجبْتُ عنِ السؤالِ 24.

انظر ملحق الإجابات

✓ إرشاد:

في السؤال 22، وجِّه الطلبة إلى استعمال قانون جيوب التمام لحساب طول الضلع الثالث في كلٍّ من المثلثين: الأول، والثالث، ثم استعماله لإيجاد قياس إحدى زوايا المثلث الأوسط.

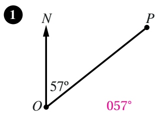
بعد ذلك اطلب إليهم إيجاد مساحة كلٍّ من المثلثات الثلاثة، وجمعها؛ لتقدير مساحة الحقل.

كتاب التمارين

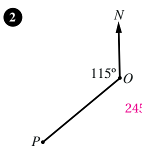
الدرسُ 1
الاتجاهُ منَ الشمالِ

الوحدةُ 4: تطبيقاتُ المثلثاتِ

أُحدِّدُ اتجاهَ النقطةِ P منَ النقطةِ O في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

057°

2 

245°

3 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ A منَ النقطةِ B هوَ $154°$، فما اتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ A؟ 343°

4 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ P منَ النقطةِ Q هوَ $235°$، فما اتجاهُ النقطةِ Q منَ النقطةِ P؟ 055°

5 أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ: A، وَB، وَ C إذا كانَتْ B شرقَ A، وكانَتْ C على اتجاهِ $110°$ منْ A، وعلى اتجاهِ $230°$ منْ B. انظر ملحق الإجابات

6 أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ: A، وَB، وَ C إذا كانَتْ B شرقَ A، وكانَتْ C على اتجاهِ $105°$ منْ A، وعلى اتجاهِ $135°$ منْ B. انظر ملحق الإجابات

7 أقلعَتْ طائرةٌ منَ المطارِ في اتجاهِ $050°$ ، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 16 km دارَتْ بزاويةِ $90°$ يسارًا، وقطعَتْ مسافةَ 37 km. ما اتجاهُ الطائرةِ الآنَ منَ المطارِ؟
انظر ملحق الإجابات

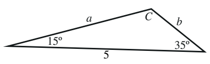
8 أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P في اتجاهِ $120°$، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 40 km دارَتْ بزاويةِ $90°$ يسارًا، وقطعَتْ مسافةَ 100 km. ما اتجاهُ السفينةِ الآنَ منَ الميناءِ P؟
انظر ملحق الإجابات

9 ABC مثلثٌ مُتطابِقُ الأضلاعِ. إذا كانَ اتجاهُ B منْ A هوَ $050°$، فما اتجاهُ C منْ B؟
اتجاه C من B هو: $170°$

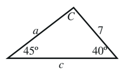
الدرسُ 2
قانونُ الجيوبِ

الوحدةُ 4: تطبيقاتُ المثلثاتِ

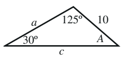
أَجِدُ القياسَ المجهولَ في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 

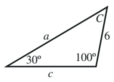
$C = 130°; a \approx 3.7; b \approx 1.7$

2 

$C = 95°; a \approx 6.4; c \approx 9.9$

3 

$A = 25°; a \approx 8.5; c \approx 16.7$

4 

$C = 50°; a \approx 11.8; c \approx 9.2$

أَجِدُ القياسَ المجهولَ في المثلثِ ABC في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

5 $a = 3, b = 2, A = 50°$
$B \approx 30.7°; C \approx 99.7; c \approx 3.9$

6 $A = 40°, B = 20°, a = 2$
$C = 120°; c \approx 2.7; b \approx 1.1$

7 $a = 2, c = 1, A = 120°$
$C \approx 25.7°; B \approx 34.3; b \approx 13$

8 $A = 70°, B = 60°, c = 4$
$C = 50°; a \approx 4.9; b \approx 4.5$

9 $b = 4, c = 6, B = 20°$
$C \approx 30.9°; A \approx 129.1°; a \approx 9.1$

10 $A = 40°, B = 40°, c = 2$
$C = 100°; a = b \approx 1.3$

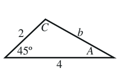
11 **طائراتٌ: رصدَتْ** كلٌّ منْ زينةَ وهناءَ طائرةً ورقيةً عندَ مرورِها فوقَ الخطِّ الواصلِ بينَهُما، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها منْ موقعِ زينةَ $35°$، ومنْ موقعِ هناءَ $40°$. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ زينةَ وهناءَ 900 m، فما ارتفاعُ الطائرةِ؟
انظر ملحق الإجابات

12 **قواربُ:** رصدَ طيّارٌ القاربيْنِ A، وَ B في البحرِ عندَما مرَّتْ طائرتُهُ فوقَ الخطِّ الواصلِ بينَهُما، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ الأولِ $44°$، وزاويةُ انخفاضِ القاربِ الثاني $37°$. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ القاربيْنِ 7 km، فما ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ؟ انظر ملحق الإجابات

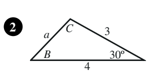
الدرسُ 3
قانونُ جيوبِ التمامِ

الوحدةُ 4: تطبيقاتُ المثلثاتِ

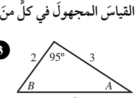
أَجِدُ القياسَ المجهولَ في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 

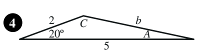
$b \approx 2.9; A \approx 29.2°; C \approx 105.8°$

2 

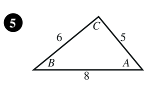
$a \approx 2.1; B \approx 45.6°; C \approx 104.4°$

3 

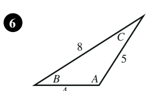
$c \approx 3.7; B \approx 53.9°; A \approx 31.1°$

4 

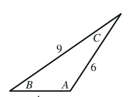
$b \approx 3.2; A \approx 12.3°; C \approx 147.7°$

5 

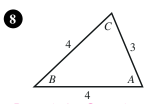
$C \approx 92.9°; A \approx 48.5°; B \approx 38.6$

6 

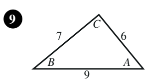
$A = 125.1°; B \approx 30.8°; C \approx 24.1°$

7 

$A \approx 127.2°; B \approx 32.1°; C \approx 20.7°$

8 

$B \approx 44°; A = C \approx 68°$

9 

$B \approx 41.8°; A \approx 51°; C \approx 87.2°$

أَجِدُ القياساتِ المجهولَةِ في المثلثِ ABC في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

10 $a = 3, b = 4, C = 40°$
$c \approx 2.6; A \approx 47.9°; B \approx 92.1°$

11 $a = 2, c = 1, B = 10°$
$b \approx 1.03; C \approx 9.7°; A \approx 160.3°$

12 $b = 1, c = 3, A = 80°$
$a \approx 2.99; C \approx 81.2°$

13 $a = 4, b = 5, c = 3$
$B = 90°; A \approx 53.1°; C \approx 36.9°$

14 $a = 5, b = 8, c = 9$
$C \approx 84.3°; B \approx 62.1°; A \approx 33.6°$

15 $a = 9, b = 7, c = 10$
$C \approx 76.2°; A \approx 60.9°; B \approx 42.9°$

16 **قواربُ:** انطلقَ قاربانِ منَ الرصيفِ نفسِهِ في وقتٍ واحدٍ. وقدْ أخذَ القاربُ الأولُ اتجاهَ $060°$، وسارَ بسرعةِ 7 km/h، وأخذَ الثاني اتجاهَ $123°$، وسارَ بسرعةِ 29 km/h. ما المسافةُ بينَ القاربيْنِ بعدَ ساعتيْنِ منَ انطلاقِهِما؟ انظر ملحق الإجابات

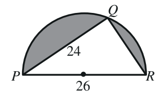
17 **سفنٌ:** أبحرَتِ السفينتانِ X، وَ Y منَ الميناءِ نفسِهِ عندَ الساعةِ التاسعةِ صباحًا. وقدْ أخذَتِ السفينةُ X اتجاهَ $075°$، وسارَتْ بسرعةٍ متوسطةٍ مقدارُها 20 km/h ، وأخذَتِ السفينةُ Y اتجاهَ $130°$، وسارَتْ بسرعةٍ متوسطةٍ مقدارُها 25 km/h. ما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ عندَ الساعةِ الحاديةَ عشرةَ صباحًا؟ انظر ملحق الإجابات

كتاب التمارين

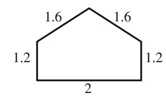
الدرسُ 4 استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1. المثلثُ ABC فيهِ $AB = 8$ cm، وَ $AC = 11$ cm، وَ $m\angle CAB = 67^\circ$. $40.5\ cm^2$
2. المثلثُ PQR فيهِ $PQ = 30$ cm، وَ $PR = 22$ cm، وَ $m\angle QPR = 120^\circ$. $285.8\ cm^2$
3. المثلثُ XYZ فيهِ $XY = 12$ cm، وَ $XZ = 15$ cm، وَ $YZ = 10$ cm. $m\angle XYZ \approx 85.5^\circ; K \approx 59.8\ cm^2$
4. المثلثُ LMN فيهِ $LM = 25$ cm، وَ $LN = 14$ cm، وَ $MN = 18$ cm. $m\angle MNL \approx 102.2^\circ; K \approx 123.2\ cm^2$
5. مساحةُ المثلثِ ABC هيَ $84\ cm^2$. إذا كانَ $BC = 15$ cm، وَ $m\angle BCA = 120^\circ$، فما طولُ $\overline{AC}$؟ $AC \approx 12.9$ cm
6. مساحةُ المثلثِ DEF هيَ $100\ cm^2$. إذا كانَ $DE = 14$ cm، وَ $m\angle DEF = 64^\circ$، فما طولُ $\overline{EF}$؟ $EF \approx 15.9$ cm
7. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ PQR إذا كانَ $m\angle QRP = 75^\circ$، وَ $m\angle PQR = 60^\circ$، وَ $PQ = 12$ cm. $QR \approx 8.8\ cm; K \approx 45.7\ cm^2$
8. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ EFG إذا كانَ $m\angle GEF = 63^\circ$، وَ $m\angle EFG = 45^\circ$، وَ $EF = 46$ cm. $GE \approx 42.2\ cm; K \approx 864.8\ cm^2$

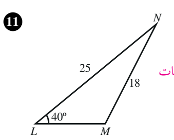


9. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ المجاورِ بالوحداتِ المربَّعةِ، علمًا بأنَّ الشكلَ نصفُ دائرةٍ.
انظر ملحق الإجابات

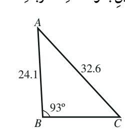


10. أَجِدُ مساحةَ النافذةِ ذاتِ الأبعادِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ بالوحداتِ المربَّعةِ.
انظر ملحق الإجابات

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثيْنِ الآتييْنِ بالوحداتِ المربَّعةِ:

11.


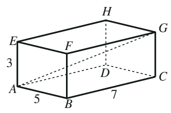
انظر ملحق الإجابات

12.


انظر ملحق الإجابات

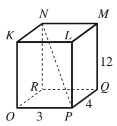
الدرسُ 5 حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ

أتأمَّلُ الشكلَ المجاورَ، ثمَّ أَحُلُّ المسألتيْنِ الآتيتيْنِ: 1–2 انظر ملحق الإجابات



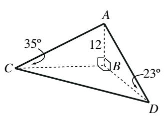
1. أَجِدُ طولَ القُطْرِ $\overline{AG}$ في متوازي المستطيلاتِ المجاورِ.
2. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ GAC.

أتأمَّلُ الشكلَ المجاورَ، ثمَّ أَحُلُّ المسألتيْنِ الآتيتيْنِ: 3–4 انظر ملحق الإجابات

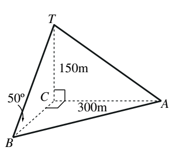


3. أَجِدُ طولَ القُطْرِ $\overline{NP}$ في متوازي المستطيلاتِ المجاورِ.
4. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ NPR.

5. **قياساتٌ**: رُصِدَ رجلانِ على الأرضِ منْ قمَّةِ برجٍ رأسيٍّ ارتفاعُهُ 25 m، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ الرجلِ الأولِ الذي يقفُ غربَ البرجِ هيَ 31°، وزاويةُ انخفاضِ الرجلِ الثاني الذي يقفُ جنوبَ البرجِ هيَ 17°. ما المسافةُ بينَ الرجلينِ؟
انظر ملحق الإجابات



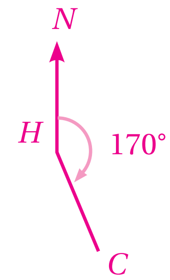
6. **ساريةٌ**: يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ساريةً رأسيةً $\overline{AB}$ ارتفاعُها 12m، والنقاطَ: B، وَC، وَ D الواقعةَ في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ، بحيثُ كانَتْ C غربَ B، وَ D جنوبَ B، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ منَ النقطةِ D هيَ 23°، ومنَ النقطةِ C هيَ 35°. ما طولُ $\overline{CD}$؟ ما اتجاهُ النقطةِ D منَ النقطةِ C؟
انظر ملحق الإجابات



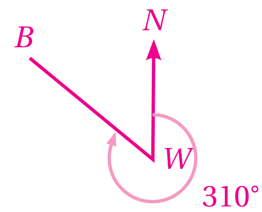
7. **أبراجٌ**: تُمثِّلُ $\overline{TC}$ برجَ إرسالٍ رأسيٍّ ارتفاعُهُ 150 m، وهوَ مُدعَّمٌ برباطيْنِ معدنييْنِ، هما: $\overline{TA}$، وَ $\overline{TB}$، وكانَ أحدُهُما مُثبَّتًا عندَ النقطةِ A الواقعةِ على الأرضِ شرقَ قاعدةِ البرجِ، وتبعدُ عنْها مسافةَ 300 m، وكانَ الآخرُ مُثبَّتًا عندَ النقطةِ B جنوبَ قاعدةِ البرجِ، وزاويةُ ميلِهِ عنِ الأرضِ 50°. ما المسافةُ بينَ النقطتيْنِ A، وَB؟ ما اتجاهُ النقطةِ A منَ النقطةِ B؟
انظر ملحق الإجابات

الدرس 1:

4)



5)

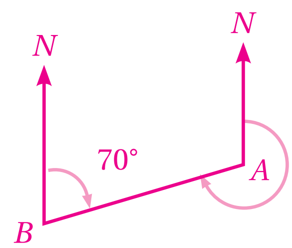


6) قياس الزاوية NAB الداخلية:

$180° - 70° = 110°$

إذن: اتجاه النقطة B من النقطة A هو:

$360° - 110° = 250°$

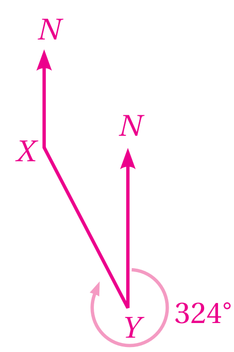


7) قياس الزاوية NYX الداخلية:

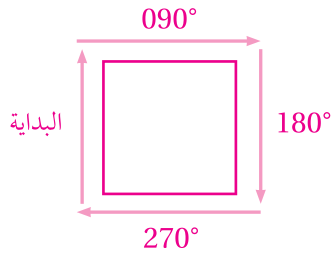
$360° - 324° = 36°$

إذن: اتجاه النقطة Y من النقطة X :

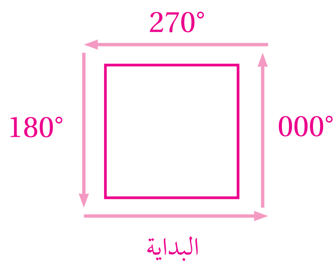
$180° - 36° = 144°$



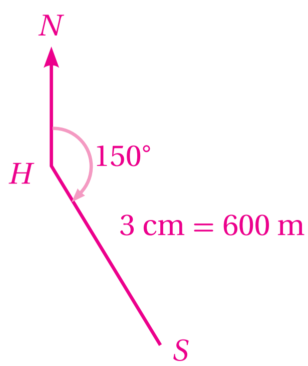
9) إذا كانت البداية في اتجاه الشمال، فإنه سيتحوَّل إلى اتجاه الشرق عند نهاية ضلع المربع، ثم الجنوب، فالغرب؛ أي إن الاتجاهات التي سلكها هي: °090 ، و °180، و °270 بالترتيب.



10) إذا كانت البداية في اتجاه °090، فإنه سيتحوَّل إلى اتجاه الشمال عند نهاية ضلع المربع، ثم الغرب، فالجنوب؛ أي إن الاتجاهات التي سلكها هي: °000 ، و °270، و °180 بالترتيب.



16)



18) قياس الزاوية NAB هو °30، وقياس الزاوية BAC هو °45؛ لأن قُطْر المُربَّع يُنصِّف زواياه.

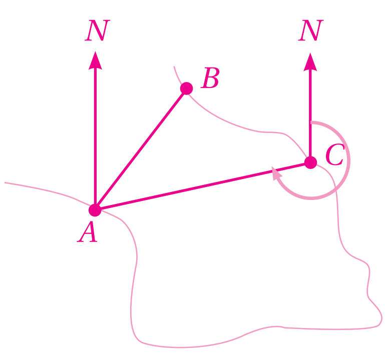
إذن:

قياس الزاوية NAC هو: $30° + 45° = 75°$

قياس الزاوية NCA الداخلية هو: $180° - 75° = 105°$ ؛ لأن الزاويتين الداخليتين المتحالفتين بين متوازيين متكاملتان.

اتجاه A من C يساوي قياس الزاوية NCA المنعكسة، وهو:

$360° - 105° = 255°$



20) انظر رسوم الطلبة.

في ما يأتي مثال على الإجابة:

قياس الزاوية NBA هو: $90° - 43° = 47°$

إذن: اتجاه A من B هو: $047°$

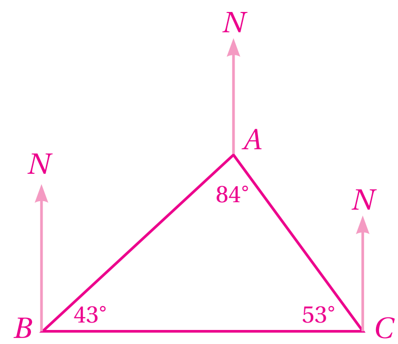
قياس الزاوية NCA هو: $90° - 53° = 37°$

قياس الزاوية NAC هو: $180° - 37° = 143°$

إذن:

اتجاه C من A هو: $143°$

اتجاه C من B هو: $090°$



21) بعد أن قطعت السفينة 57 km في اتجاه الشمال تحوَّلت عند Q إلى اتجاه 045° حتى وصلت الموقع S.

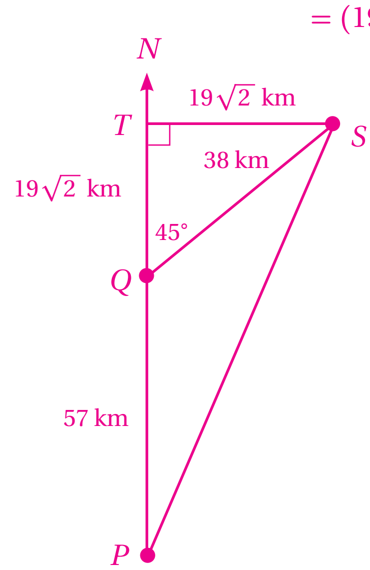
لإيجاد PS، يُرسَم عمود من S إلى امتداد PQ، فينتج مثلثان قائما الزاوية، هما: STQ، و STP.

في المثلث STQ، الضلعان TS, TQ متطابقان، وكلٌّ منهما يساوي:

$$SQ \times \sin 45° = 38 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 19\sqrt{2}\ \text{km}$$

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث STP، ينتج:

$$(SP)^2 = (ST)^2 + (PT)^2$$
$$= (19\sqrt{2})^2 + (19\sqrt{2} + 57)^2$$
$$= 722 + 7034.1866$$
$$= 7756.1866$$
$$SP = \sqrt{7756.1866}$$
$$\approx 88.1\ \text{km}$$



22) لإيجاد اتجاه S من P، يتعيَّن إيجاد قياس الزاوية QPS، وليكن هذا القياس x.

من المثلث قائم الزاوية STP، يُلاحَظ أن:

$$\tan x = \frac{19\sqrt{2}}{19\sqrt{2} + 57} = 0.3204$$
$$x = \tan^{-1}(0.3204) \approx 18°$$

إذن: اتجاه S من P هو $018°$ مُقرَّبًا إلى أقرب درجة.

الدرس 3:

11) إيجاد الحالات الثلاث بحسب قانون جيوب التمام:

i) $\theta = 120$

ii) $\theta = 38.2$

iii) $\theta = 21.79$

إذن: أصغر زاوية هي 21.79 المقابلة للضلع $3a$.

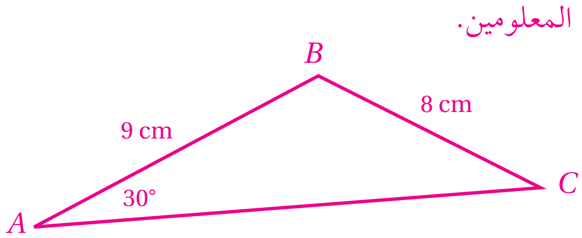
الدرس 4:

13) $(BD)^2 = (25)^2 + (73)^2 - 2(25 \times 73 \times \cos 65°) = 4411.443$

$\text{BD} = \sqrt{4411.443} = 66.418$

إذن: طول BD مُقرَّبًا إلى أقرب متر هو 66 m

20) أخطأت نور حين جعلت الزاوية A محصورة بين الضلعين المعلومين.



الزاوية المحصورة بين الضلعين المعلومين هي B:

$$\frac{\sin C}{9} = \frac{\sin 30°}{8}$$
$$C = 34.2°$$
$$B = 115.8°$$

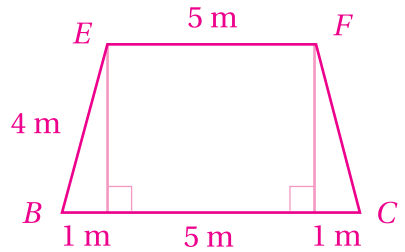
مساحة المثلث:

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \sin 115.8° \approx 32.4\ \text{cm}^2$$

وقد تكون $C = 145.8°$ (مكملة 34.2°)، عندئذٍ تكون $B = 4.2°$، ومساحة المثلث:

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \sin 4.2° \approx 2.64\ \text{cm}^2$$

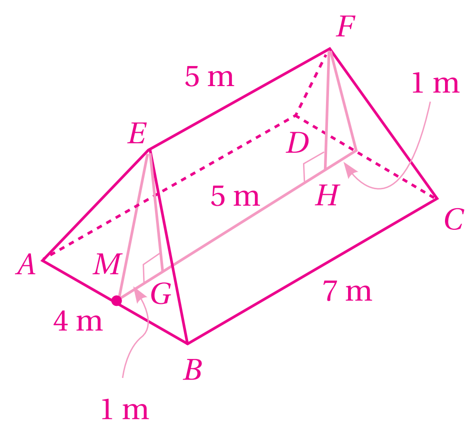
8) قياس الزاوية EBC هو: $\cos^{-1}(\frac{1}{4}) = 75.5°$



9) الزاوية بين EM والقاعدة $ABCD$ هي الزاوية EMG ، وإذا أُنزِل عمود من F إلى القاعدة تكوَّن المستطيل $EGHF$ ومثلثان، طول قاعدة كلٍّ منهما $1\,m$.

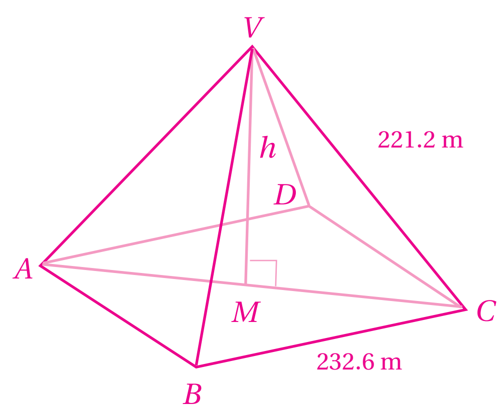
إذن: جيب تمام الزاوية EMG هو: $\frac{MG}{EM} = \frac{1}{3.46}$ ،

وقياسها هو: $\cos^{-1}(\frac{1}{3.46}) = 73.2°$



15) $(AC)^2 = 232.6^2 + 232.6^2 = 2(232.6)^2$

$AC = 232.6\sqrt{2}$



النقطة M هي منتصف AC؛ أي إن:

$$AM = \frac{1}{2}(232.6\sqrt{2}) = 116.3\sqrt{2}$$
$$h^2 = 221.2^2 - (116.3\sqrt{2})^2$$
$$= 21878.06$$
$$h = 147.9\ m$$

16) ليس صحيحًا؛ لأن $\tan 15° \neq \frac{1}{2}\tan 30°$

ارتفاع الشجرة فوق مستوى عيني شيماء هو: $14 \tan 30°$

إذا كانت زاوية ارتفاع الشجرة بالنسبة إلى ليلى هي θ، فإن:

$$\tan\theta = \frac{14\tan 30°}{28}$$
$$= \frac{8.083}{28}$$
$$\theta = \tan^{-1}(8.083 \div 28) \approx 16.1°$$

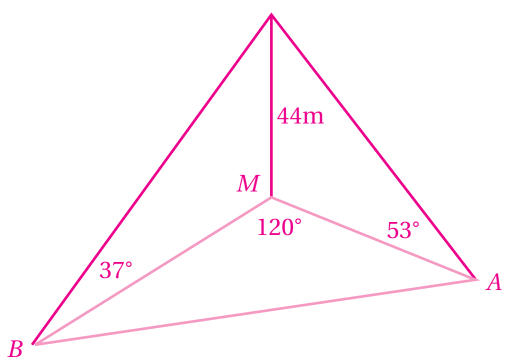
17) $MB = 44 \div \tan 37° = 58.39$

$AM = 44 \div \tan 53° = 33.16$

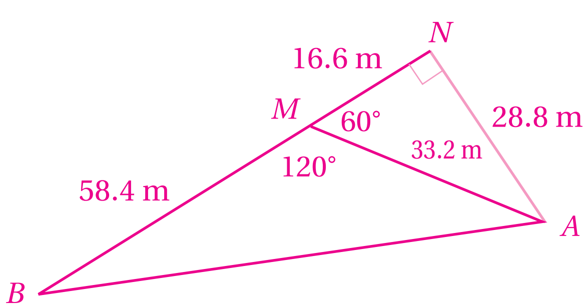
$(AB)^2 = (58.39)^2 + (33.15)^2 - 2 \times 58.39 \times 33.16 \cos 120°$

$= 6445.1901$

$AB \approx 80.3\ m$



حل آخر للسـؤال 17 بعد إيجاد MA، وMB، يستعمل الطلبة قانون جيوب التمام لإيجاد المسـافة بين القاربين. ويمكن إيجاد هذه المسـافة باعتماد المثلثات القائمة فقط كما في الشكل الآتي:



$(AB)^2 = 75^2 + 28.8^2 = 6454.44$

$AB \approx 80.3\ m$

إجابات بند (أتحقق من فهمي) الدرس 5:

مثال 2

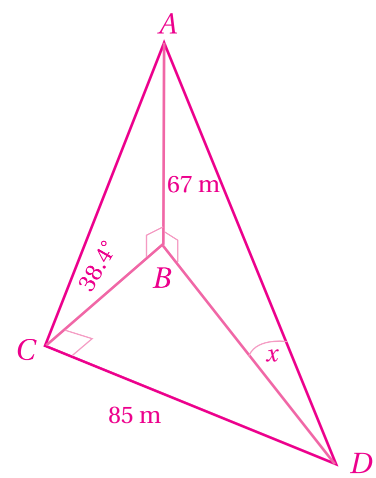
$$CB = \frac{34}{\tan 38.4^\circ} = 84.5 \text{ m}$$

$$BD = \sqrt{85^2 + 84.5^2} = 119.9 \text{ m}$$

لتكن زاوية ارتفاع قمة المئذنة من النقطة D هي x، فإن:

$$\tan x = \frac{67}{119.9} \approx 0.559$$

$$x = \tan^{-1}(0.559) = 29.2^\circ$$



مثال 3

من المثلث HPA، يَتبيَّن أن:

$$AP = \frac{600}{\tan 40^\circ} \approx 715.1 \text{ m}$$

ومن المثلث HPB، يَتبيَّن أن:

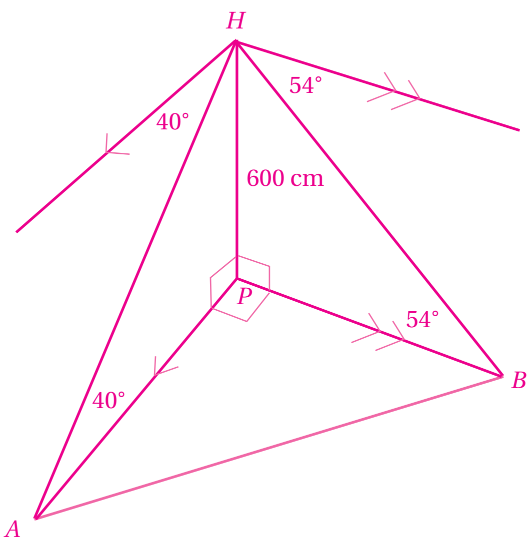
$$BP = \frac{600}{\tan 54^\circ} \approx 435.9 \text{ m}$$

$$(AB)^2 = 715.1^2 + 435.9^2$$

$$= 701376.82$$

$$AB \approx 837.5 \text{ m}$$

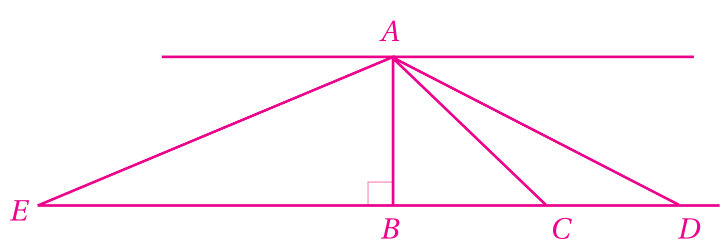
إذن: المسافة بين السفينتين 837.5 m تقريبًا.



اختبار نهاية الوحدة:

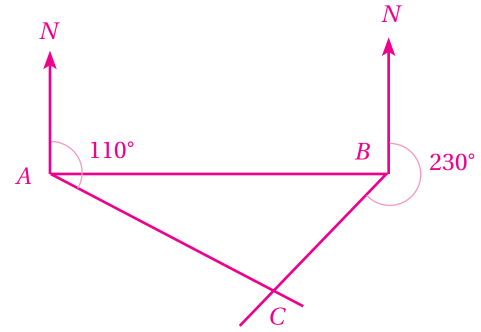
26) الشيء الذي زاوية انخفاضه أكبر هو الأقرب إلى الناظر.

في الرسم الآتي، النقطة B هي أقرب إلى النقطة A من بين النقاط: B، C، وD، وE، وزاوية انخفاضها هي الكبرى.

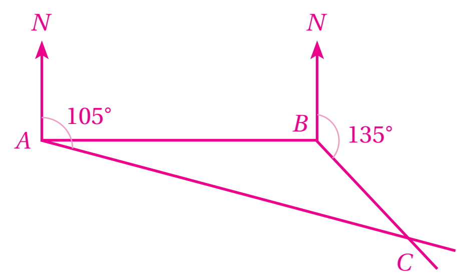


إجابات كتاب التمارين – الدرس 1:

5) تقع النقطة C عند تقاطع الاتجاهين $110°$ من A، و $230°$ من B.



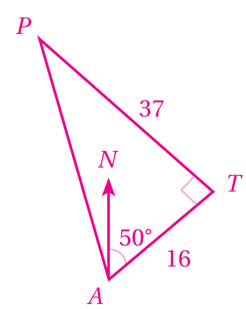
6) تقع النقطة C عند تقاطع الاتجاهين $105°$ من A، و $135°$ من B.



7) $m\angle PAT = \tan^{-1}\left(\frac{37}{16}\right) \approx 66.6°$

$m\angle PAT = 66.6° - 50° = 16.6°$

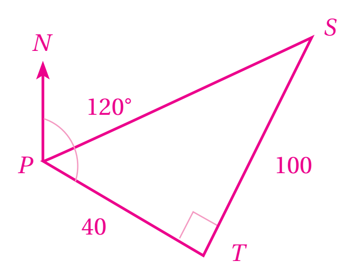
اتجـاه الطائرة P من المطار A يسـاوي قياس الزاوية المنعكسـة NAP، وهو: $360° - 16.6° = 343.4°$



8) $m\angle SPT = \tan^{-1}\left(\frac{100}{40}\right) \approx 68.2°$

$\Rightarrow m\angle NPS = 120° - 68.2 = 51.8°$

اتجاه السفينة من الميناء الآن هو: $051.8°$

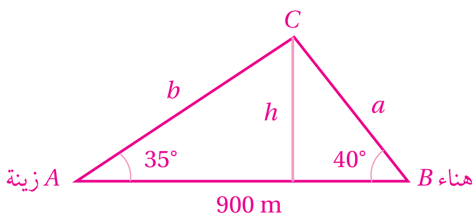


إجابات كتاب التمارين – الدرس 2:

11) $C = 105°$

$$\frac{b}{\sin 40°} = \frac{900}{\sin 105°} \Rightarrow b \approx 598.9$$

$$\sin 35° = \frac{h}{598.9} \Rightarrow h \approx 343.5$$

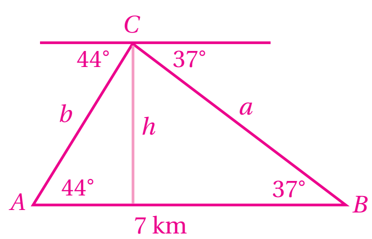


إذن: ارتفاع الطائرة 343.5 m تقريبًا.

12) $C = 99°$

$$\frac{b}{\sin 37°} = \frac{7}{\sin 99°} \Rightarrow b \approx 4.24$$

$$\sin 44° = \frac{h}{4.24} \Rightarrow h \approx 2.97$$

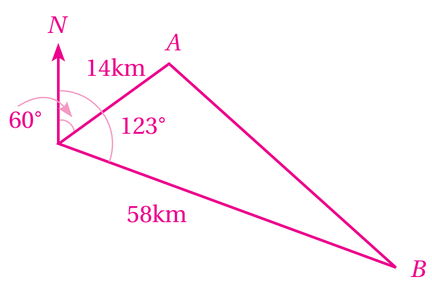


إذن: ارتفاع الطائرة 2.97 km تقريبًا.

إجابات كتاب التمارين – الدرس 3:

16) الزاوية بين خطي سير القاربين: $123° - 60° = 63°$

المسافة التي قطعها الأول: 14km المسافة التي قطعها الثاني: 58 km



$$(AB)^2 = 14^2 + 58^2 - 2 \times 14 \times 58 \times \cos 63°$$

$$\Rightarrow AB \approx 53.1 \text{ km}$$

17) الزاوية بين خطي سير السفينتين:

$130° - 75° = 55°$

المســافة التي قطعتها الســفينة الأولى من الســاعة 9 صباحًا إلى الساعة 11 صباحًا: 40 km

المسافة التي قطعتها السفينة الثانية من الساعة 9 صباحًا إلى الساعة 11 صباحًا: 50 km

لتكن المسافة بين السفينتين عندئذٍ d:

$d^2 = 40^2 + 50^2 - 2\times 40\times 50 \times \cos 55° \Rightarrow d \approx 42.5$ km

إجابات كتاب التمارين – الدرس 4:

9) $QR = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$

مساحة المنطقة المظللة= مساحة نصف الدائرة – مساحة المثلث القائم PQR

$= 0.5\times 13^2\times \pi - 0.5\times 24\times 10 \approx 145.5$

10) قياس زاوية رأس المثلث: $77.4°$ تقريبًا.

مساحة النافذة = مساحة المثلث + مساحة المستطيل

$= 0.5\times 1.6\times 1.6\times \sin 77.4° + 2\times 1.2 \approx 3.65$

11) $\dfrac{25}{\sin M} = \dfrac{18}{\sin 40°} \Rightarrow M \approx 63.2°$

$N \approx 76.8°$

$K = 0.5\times 25\times 18\times \sin 76.8° \approx 219$

12) $\dfrac{32.6}{\sin 93°} = \dfrac{24.1}{\sin C} \Rightarrow C \approx 47.6°$

$A \approx 39.4°$

$K = 0.5\times 32.6\times 24.1\times \sin 39.4° \approx 249.3$

إجابات كتاب التمارين – الدرس 5:

1) $AC = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$

$AG = \sqrt{74 + 3^2} = \sqrt{83} \approx 9.1$

2) $m\angle GAC = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{74}}\right) \approx 19.2°$

3) $RP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

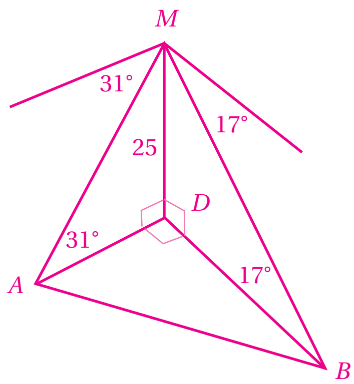
$NP = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

4) $m\angle NPR = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right) \approx 67.4$

5) $BD = \dfrac{25}{\tan 17°} \approx 81.8$

$AD = \dfrac{25}{\tan 31°} \approx 41.6$

$AB = \sqrt{81.8^2 + 41.6^2} = 91.8$ m



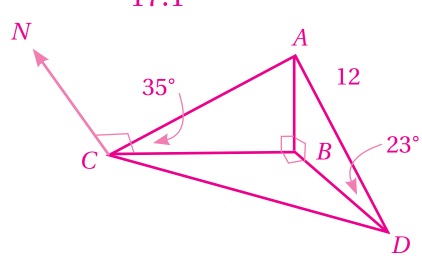
6) $CB = \dfrac{12}{\tan 35°} \approx 17.1$ m ;

$DB = \dfrac{12}{\tan 23°} \approx 28.3$ m

$CD = \sqrt{17.1^2 + 28.3^2} = 33.1$ m

اتجاه D من C يســاوي قياس الزاوية بين خط الشــمال $\overrightarrow{CD}$ والقطعة $\overline{CD}$، وهو: $m\angle NCB + m\angle BCD$

$= 90° + \tan^{-1}\left(\dfrac{28.3}{17.1}\right) \approx 90° + 58.9° = 148.9°$



7) $BC = \dfrac{150}{\tan 50°} \approx 125.9$ m ;

$AB = \sqrt{125.9^2 + 300^2} \approx 325.3$ m

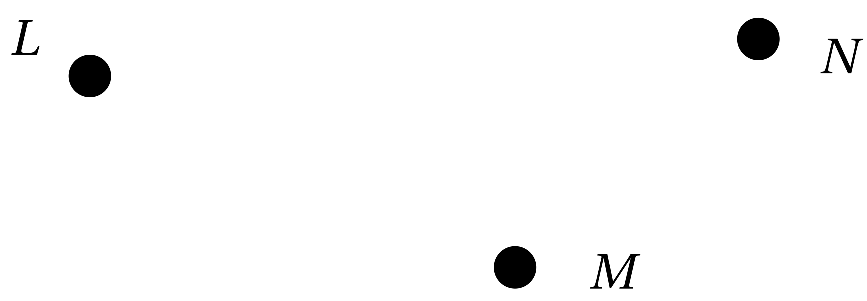
اتجاه A من B يســاوي قياس الزاوية CBA؛ لأن BC هو خط الشمال المار بـ B، وهي: $\tan^{-1}\left(\dfrac{300}{125.9}\right) \approx 67.2°$

إذن: الاتجاه المطلوب هو $067.2°$

ورقة العمل 1

الدرس 1: الاتجاه من الشمال.

اعتمد النقاط الآتية في الإجابة عن الأسئلة التي تلي:



1) أجد اتجاه النقطة M من النقطة L.

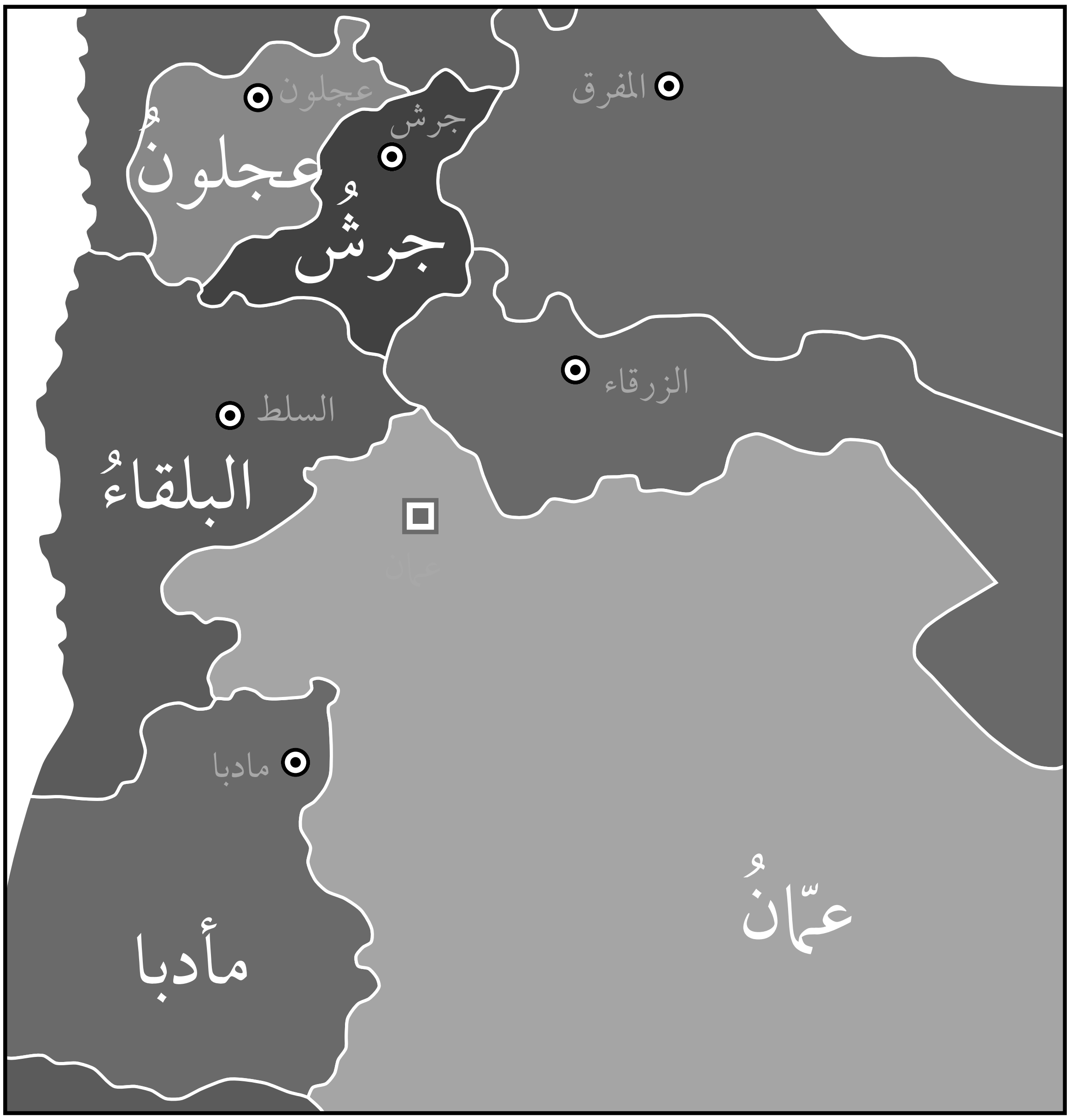
2) أجد اتجاه النقطة M من النقطة N.

3) أجد اتجاه النقطة N من النقطة M.

ورقة العمل 2

الدرس 1: الاتجاه من الشمال.

اعتمادًا على الخريطة في الشكل المجاور، أجيب عن الأسئلة الآتية:



4) أجد اتجاه مدينة السلط من مدينة عمّان.

5) أجد اتجاه مدينة عمّان من مدينة مأدبا.

6) أختار أي مدينتين: A، أو B من الخريطة، ثم أجد اتجاه A من B، واتجاه B من A.